A SUA ECCELLENZA

IL SIG.

CARLO CONTE DI FIRMIAN

SIGNORE DI CRONMETZ MEGGEL
E LEOPOLDSCRON
CAVALIERE DELL' INSIGNE ORDINE
DEL TOSON D'ORO
PLENIPOTENZIARIO NELLA LOMBARDIA AUSTRIACA
VICE-GOVERNATORE DI MANTOVA
SABIONETA E BOZZOLO
CONSIGLIERE INTIMO ATTUALE DI STATO

ec. ec. ec.

DELLE

PROGRESSIONI E SERIE

LIBRI DUE

DEL P. FRANCESCO LUINO

della Compagnia di Gesù

COLL' AGGIUNTA

DI DUE MEMORIE

DEL P. RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

della medesima Compagnia.

IN MILANO. MDCCLXVII.
Appresso Giuseppe Galeazzi Regio Stampatore.
Con licenza de' Superiori, e Privilegio.

ECCELLENZA.

A Una tenue , e poco pregevole operetta , qual ſi è queſta mia , ſembra , che mal ſi convenga il venire innanzi a V. E. , e richiederla di ſua protezione . Ma , qual ch' egli ſiaſi il Libro , eſſo è

pur Libro , che appartiene a ſcienza , e a quella ſingolarmente , la quale ſopra le altre tutte per maniera ſollevaſi , che il gran VVolfio non temè di dire Humanae eruditionis apicem conſcendimus Analyſim tradituri. *Ciò baſta , non ſolo perchè io punto non dubiti , che V. E. non ſia per accoglierlo favorevolmente, ma anche perchè io mi rechi a dovere il farlene offerta . Io non parlo qui , o Signore, nè dell' amore alle lettere , ed alle ſcienze , che in mezzo alle più ardue cure del Politico*

Go-

Governo le è indivisibil compagno, nè della deputazion luminosa, ch' Ella ha dall' Augustissima Nostra Sovrana riportato nella soprantendenza alla Regia Università di Pavia, e a tutte le Scuole della Lombardia Austriaca a V. E. incaricata. Sono, è vero, questi per me vivi stimoli a supplicarla di volere col patrocinio suo accordare a quest' opera mia quel pregio, che altronde non potrebbe sperare. Ma un altro motivo rammenterò io piuttosto, che a me in particolar modo appartiene, e non

ſarà, ſpero, a V. E. diſcaro. A giovamento di quegli principalmente, che intraprendono lo ſtudio delle ſcienze Aſtronomiche, ho io indirizzata queſta mia operetta: Perciocchè riflettendo, che queſta sì nobile ſcienza non ſi ferma più di preſente nelle ſemplici ricerche de' fatti, e nella ſola oſſervazione, e combinazion de' fenomeni, ma s' innoltra a eſaminare le cagioni, e da queſte ne trae le tante, ed in apparenza sì irregolari variazioni, con un continuo uſo, non ſolo della più ſublime geome-

tria,

trìa, ma ancor del calcolo, e in questo non delle semplici proporzioni, e progressioni, ma del più composto metodo delle interpolazioni, e di ogni specie di serie le più complicate, io ho intrapreso, e di acquistare per me, e di comunicare poscia agli altri, quelle cognizioni, che più vantaggiose a ciò fossero, e più necessarie. Nel che fare, quanto a ragione possa io lusingarmi di avere fatta cosa a V. E. gradita, agevolmente conoscerallo chiunque sa, e la premura, e l' impegno, ch' Ella ha in promuo-

vere gli studj di tale natura, ed il favore singolarmente da V. E. prestato alla erezione di questa nostra Astronomica Specola. Questo, o Signore, è ciò, che mi fa più d' ogn' altra cosa ardito di offerire a V. E. il presente, qualunque sia, frutto di mie fatiche; e pieno de' più sinceri sentimenti di riconoscenza, e di sommissione, col più profondo rispetto mi protesto

Di V. E.

Milano 23. *Ottobre* 1767.

Umilifs., Divotifs., Obbligatifs. servo.
Francesco Luino della Comp. di Gesù.

PREFAZIONE.

L'Opera, che vi presento, o cortese Lettore, non vi suppone nè matematico consumato, nè affatto novizio nelle matematiche facoltà. Per amendue queste classi di persone si sono, ancora a' dì miei, pubblicati acconci trattati in ogni genere, ossia di calcolo, ossia spettanti a geometría; quando vi siate già altronde provisto di una cotale misura di notizie sul calcolo finito di Cartesio, e sull' infinito delle serie, credo, che dalla lettura della presente operetta ne potrete trarre vantaggio, e per riordinarvi in capo le cose quà e là lette sparsamente su altri Autori, e per promuovere più oltre le cognizioni vostre sull' arte analitica, e per addestrarvi eziandio alla invenzione di nuovi metodi pel calcolo più sublime. A questi tre fini io almeno ho indirizzata l'Introduzione, ed i due Libri, ne' quali è divisa questa mia operetta; non so poi se sarò stato bastantemente fortunato per conseguirgli.

Nella Introduzione vi piacerà forse il vedere ristrette in poche formole, universali, e chiare, tutte le note leggi del calcolo per ogni specie di quantità algebraiche, ed i migliori metodi per trasformare, e per isciogliere le equazioni di diverso grado, che più frequentemente s' incontrano nella solu-

luzione de' problemi. Fin qui però non v'ha nulla di nuovo, nè che sia da pregiarsi più che tanto seppure di ciò degna a taluno non sembri la trattazione sulle quantità positive, e negative, e sulle regole de' segni; le trasformazioni ne' radicali, e la stesa, che ho data al metodo del Varignon per la soluzione delle equazioni di grado più elevato del terzo. A vero dire, io mi sono determinato a' pubblicare questo *Trattato del Calcolo algebraico* per modo d'introduzione al restante, non tanto per non obbligarvi a rivedere su altri Autori gli artifizj analitici, de' quali mi servo continuamente nel decorso, quanto perchè mi sembravano quelle tre materie trattate con qualche, non a tutti comune, eleganza, e precisione.

Nel primo Libro, in cui si parla delle progressioni geometriche, ed aritmetiche, incominciarete, spero, o Lettore, a sentire la fecondità, e l'importanza dell' analisi, ed acquisterete più giuste idee del legamento, ed unità delle parti, che la compongono. Trattano alcuni Autori la teoría delle progressioni indipendentemente dall' Analisi Cartesiana, a cui anzi la fanno precedere; ma le loro dimostrazioni restano sempre per ciò snervate, e languide, nè si sostengono che su certi metafisici raziocinj, non tanto facili a concepirsi, ed assai nojosi; io all' incontro dell' Analisi Cartesiana mi servo per dimostrarla, e su d'essa l' appoggio principalmente. La teoría delle proporzioni, e quella de'

lo-

logaritmi, tengono, dirò così, chiusa in mezzo la teoría delle progressioni, e stanno tutte e tre insieme unite per modo, che non si può degnamente trattare l'una senza l'altre. Nel Capo primo adunque di questo Libro, si parla delle proporzioni geometriche, ed aritmetiche, e col perpetuo uso di formole assai vibrate, e strette, seguitate poscia, ed illustrate da riflessioni addattate, e da opportune spiegazioni, mi lusingo di poter rendere famigliare, e dolce all' iniziato Algebrista l'analitico linguaggio, a cui troppo è necessario, che s'avvezzi la fantasia, se pretende innoltrarsi ne' calcoli più profondi. Nel Capo secondo vedrete, dedotta tutta la teoría delle progressioni geometriche, ed aritmetiche da due soli, e semplicissimi principj, con accompagnamento copioso di teoremi, e problemi, e di formole ben dimostrate, ed universali. Pel terzo Capo ardirei quasi di assicurarvi, che la teoría de' logaritmi vi è messa nella possibile, miglior sua luce, a non dover dispiacere anche a' più intendenti. Ho presa da Eulero la più genuina, e più naturale idea de' logaritmi, che noi usiamo ne' calcoli; ma quanto io dica di più d'Eulero sulla loro natura, e sulla maniera d'usargli, agevolmente conoscerallo chiunque si vorrà prendere la briga di confrontare ciò, ch' io espongo, e dimostro *ex professo*, con ciò, che ha detto Eulero, che tratta questo punto sol di passaggio. Il metodo di evitare i logaritmi negativi, tanto utile pe' calcoli trigonometrici, mi è costato assai

per ridurlo a quella ſimplicità, ed univerſalità, che non ſarà forſe facile ritrovare preſſo altri Autori.

Ma in queſto primo Libro, ſiccome ancora nell' Introduzione, non vi ſono che coſe elementari, e l'unico loro pregio, ſeppure ne hanno alcuno, ſi è che *non vi ſono trattate elementarmente*; quaſi tutte all' incontro le coſe, ch' entrano nel ſecondo Libro appartengono al calcolo ſublime, dove hanno il maggior ſuo uſo, ed ho procurato di maneggiarle, e di ſtenderle con quella preciſione, e ſcioltura di ſcrivere, che ad eſſe ſi conviene. Non v'ha teoría, che più naturalmente debba venir dopo quella delle progreſſioni, che la teoría delle ſerie, di cui quelle ne ſono il primo ramo; eppure quanto pochi ſi ſenton portati a ſtudiarla con applicazione? Ciò accade, parte per la difficoltà de' calcoli, pe' quali conviene pur paſſare per ben comprenderla, parte perchè non vedeſi di primo colpo a quale fine, e con quale profitto per l'altre parti della matematica ſi poſſa eſſa indirizzare. Ho ſtimato perciò, che riuſcirà coſa a tutti giovevole, ſe così tentaſſi di condurgli alla teoría delle ſerie, che inſieme reſtaſſero da ſe appianati queſti oſtacoli. Primamente mi ſo a moſtrare ne' primi due Capi del ſecondo Libro, quanto frequentemente uopo ſia entrare ne' calcoli colle ſerie, e con quanta velocità ſi determinin con eſſe i valori delle incognite quantità, o delle quantità aſſai compoſte, che ad ogni paſſo è meſtieri introdurre nella ſoluzione de' problemi,

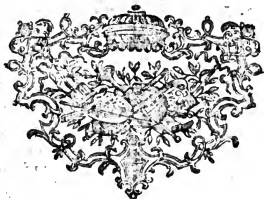
e delle

e delle equazioni algebraiche. Qui vedrete, o Lettore, trattata compiutamente l'evoluzione in serie delle potenze, e de' radicali, con metodi, altri presi da altri Autori, e da me ristretti in formole egualmente brevi, che universali; altri derivati da me col calcolo da que' primi, ed uno principalmente il più semplice, ed il meno avvertito, applicato distesamente a' numeri. Qui troverete innoltre sviluppati i metodi per l'evoluzione delle radici nelle equazioni composte, per l'evoluzione delle frazioni, finiti, ed infinitinomie ne' loro termini, per lo spezzamento delle frazioni volgari, e per il problema diretto, ed inverso delle frazioni continue. In tutte, ed in ciascuna di queste particolari trattazioni io penso d'avere e rischiarati, e messi in miglior ordine, e in varie guise aumentati, e distesi a più grande generalità diversi metodi fin qui conosciuti, ed usati ne' calcoli. Vorrei, che contaste trai primi un metodo della Signora Agnesi, per lo spezzamento delle frazioni, ridotto qui a' suoi veri principj, ed alla generalità, che troppo mancava all' esposizione dell' Agnesi. Il Capo terzo mette fine al mio lavoro: Si parla in esso della invenzione de' termini generali, e delle somme generali delle serie. Ognun sa quanto sia intralciata questa parte di matematica, e per la difficoltà dell' argomento, e per i moltiplici, e tutti da sublimi principj derivati metodi, de' quali l'hanno arricchita i più accreditati Scrittori. Io distinguo in tre classi le serie, cioè in serie

 arit-

aritmetiche , in serie geometriche , ed in serie composte dalle aritmetiche , e dalle geometriche ; assegno gl' infiniti diversi ordini , ne' quali si suddivide ciascuna classe , e per ciascuna classe espongo il metodo più acconcio , e più facile per trovare il termine , e la somma generale cercata . Vero è , che non mi sono divertito a formare a bella posta nuove serie intralciate , comunque di nessun uso , unicamente per avere il piacere di sommarle , o di trovare il loro termine generale ; ma oltrecchè altri l' hanno già fatto per me , a nessuno il divieto di farlo in avvenire ; io ho stimato di dovere andar dietro piuttosto all' utilità , che alla pompa . Quanto al metodo , egli è unico , e semplicissimo per tutte le serie sommabili , ma non è mio . Il celebre P. Riccati lo ha trovato , e svolto in tutte le sue parti nell' egregio suo Commentario sulle serie , pubblicato fino dall' anno 1756. , nè credo mi riprenderà di ardito , se vedrà , che dopo l' esposizione del suo Metodo , e dopo l' applicazione del medesimo alle dette tre classi di serie , io mi sono innoltrato a stendere alcune mie piccole osservazioni , indirizzate a renderlo più semplice , e spedito per la pratica : Tanto più ch' esse m' hanno servito a sciogliere per una strada , ch' io credo non ancora battuta da altri , il noto problema delle interpolazioni . Quante sono le serie , alle quali si stende il Metodo del P. Riccati , altrettante sono quelle , che s' interpolan col mio ; anzi dato il termine generale di qualunque

altra

altra ſerie, ſi trova il termine generale della medeſima ſerie interpolata, e ſe la ſerie è ſommabile ſi trova anche la ſomma generale della interpolata, trovata che ſia la generale ſomma della data. Voleva a tutto queſto aggiungere una copioſa applicazione di queſto Metodo all' Aſtronomía, ed eſporre gli uſi del medeſimo per la quadratura delle curve; ma queſta ſarebbe ſtata una digreſſione fuori di luogo, e l'opera, come ſta, mi pare, che vada dal ſuo principio fino al fine ſufficientemente creſcendo colle dovute gradazioni.

INDICE.

INTRODUZIONE.

Calcolo Algebraico, e suo uso nella risoluzione delle equazioni.

LIBRO PRIMO.

Proporzioni, e Progressioni Geometriche, ed Aritmetiche.

CAPO

LIBRO SECONDO.

Formazione, e Sommazione delle serie.

AGGIUNTA.

JOANNES CAROLUS PINCETI

SOCIETATIS JESU

In Provincia Mediolanensi Præpositus Provincialis.

CUM Librum, cui titulus est: *Delle Progressioni, e Serie*; a P. Francisco Luino Societatis nostræ Sacerdote compositum, aliquot periti Viri, quibus commissum fuit, recognoverint, & in lucem edi posse probaverint: facultate nobis a R. P. Laurentio Ricci Præposito Generali communicatâ, concedimus, ut typis mandetur, si ita iis, ad quos pertinet, videbitur. In quorum fidem has literas manu nostra subscriptas, & sigillo Societatis nostræ munitas dedimus.

Mediolani die 17. Novembris 1767.

Loco ✠ Sigilli.

INTRODUZIONE.

CALCOLO ALGEBRAICO

E suo uso nella soluzione delle Equazioni.

CAPO PRIMO.

Delle quantità Algebraiche, e loro calcolo in generale.

Nozioni sulle quantità Algebraiche.

1. LE volgari cifre Arabiche 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. colle quali usasi per lo più calcolare i numeri, oltre il difetto di non essere atte ad esprimere che le quantità conosciute, rendono le operazioni del calcolo troppo prolisse, e confondono i passi delle operazioni medesime, compenetrando di mano in mano i valori de' risultati. Quindi è stato necessario esprimere e calcolare i numeri con altri segni che fossero più universali, e rendessero le operazioni del calcolo più spedite, e più chiare. Si sono assuefatti i Matematici alle lettere del Alfabeto: da principio esprimevansi con quelle cifre 1. 2. 3..... i numeri cogniti, e gli incogniti cogli $a.b.c...$, in seguito, ad esempio di Cartesio, i numeri cogniti s'incominciarono indifferentemente ad esprimere, o colle cifre 1. 2. 3..., o colle prime lettere dell'Alfabeto $a.b.c....$, e gli incogniti colle ultime $x.y....$ come si usa comunemente a' nostri dì. Il calcolo delle quantità numeriche così espresse, si chiama *calcolo Algebraico*, o *calcolo delle quantità Algebraiche*, per l'uso grande ch'egli ha nell'Algebra ancor più sublime.

2. Si

2. Si fanno adunque ſu queſte quantità le ſteſſe operazioni che ſi uſano ne' numeri. Coll' Addizione ſi cerca una quantità eguale ad altre quantità date, e preſe inſieme: Colla ſottrazione ſi cerca l'eceſſo d'una quantità ſopra un' altra: Colla multiplicazione ſi cerca una quantità che così contenga una delle date, come nell'altra ſi contiene l'unità: Colla diviſione ſi cerca una quantità che così contenga l'unità, come in una delle date ſi contiene l'altra. Per indicare queſte operazioni del calcolo nelle Algebraiche quantità, ſi ſono poſti in uſo certi ſegni; per ſegno dell'Addizione ſi è ſcelto il $+$ che ſignifica *più*; per la ſottrazione il $-$ che ſignifica *meno*; per la multiplicazione il $\times$, oppure un punto che ſignifica *multiplicato per*; per la diviſione una linea di ſeparazione tralla quantità a dividerſi, e quella per cui ſi deve fare la diviſione ſcritta ſotto la prima, appunto come nelle frazioni numeriche; ſi uſano altresì due punti o il ſegno $\div$ poſto tralle due quantità date per la diviſione. Il ſegno $>$ meſſo tra due quantità indica che quella è maggiore verſo cui ſta rivolta l'apertura del ſegno.

$a + b$ ſignifica b congiunto ad a

$a - b$ ſignifica b ſottratto da a

$a \times b$, $a \,.\, b$, $a\,b$ } ſignifica a moltiplicato per b; nell'eſpreſſione $a\,b$ s'intende frappoſto il ſegno di multiplicazione.

$\frac{a}{b}$, $a : b$, $a \div b$ } ſignifica a diviſo per b

$a > b$, $a < b$ } ſignifica a maggiore di b, a minore di b

3 Le quantità a, b, c.... ſi chiamano quantità *incompleſſe ſemplici*; le $a\,b$, $a\,b\,c$..... ſi chiamano *incompleſſe compoſte*; ed una quantità formata da più quantità incompleſſe, ma inſieme con-

congiunte co' segni $+$ $-$, si chiama quantità complessa; sarà *binomia*, se sarà formata da due quantità incomplesse (ciascuna di queste si chiama *termine*) come $a + bc$; sarà *trinomia*, se sarà formata da tre termini come $ab - cd + f$; sarà... ec., e si chiamerà *finitinomia*, o *indefinitinomia* se sarà formata da un numero finito, o indefinito di termini. Termine *simile* ad un altro, significa termine formato dalle medesime lettere dell'altro, le quantità complessa *simile* ad un altra, è quella quantità in cui tutti i termini sono simili, rispettivamente ai termini dell'altra,

4. In ogni termine d'una quantità algebraica come $5abx$ vanno distinti i *coeficienti* dagli *esponenti*. Quanto ai coeficienti: 1.° Altri sono coeficienti del termine, ed altri sono coeficienti di una o più lettere; i coeficienti del termine, altrimenti detti coeficienti *numerici*, sono que' numeri che precedono verso la sinistra qualunque quantità meramente algebraica; i coeficienti d'una o più lettere sono tutte le quantità, che con quell'una o più lettere formano il dato termine. Nel termine $5abx$, il numero 5 è coeficiente numerico del termine $5abx$; $5ab$ è coeficiente di x; $5ax$ è coeficiente di b; $5bx$ è coeficiente di a. 2.° Que' termini che non hanno altro coeficiente numerico, hanno almeno per coeficiente l'unità, così il coeficiente numerico di abx è 1, essendo abx eguale a $1abx$. 3.° La diversità de' coeficienti numerici non turba la somiglianza, o dissomiglianza di due termini; cioè per distinguere le quantità simili dalle dissimili, non si ha riguardo che alle lettere; $5abx$ è simile ad abx.

5. Quanto agli esponenti. 1.° Altro è esponente dalle dimensioni d'un termine, altro è esponente dalle dimensioni d'una lettera del termine medesimo; esponente delle dimensioni d'un termine, è il numero che esprime di quante lettere è formato quel termine; il termine ab è di due dimensioni, perchè è formato di due lettere; abc è di tre dimensioni....... Questo nome di dimensioni è preso dall'analogía alla geometría, come si

vedrà a suo luogo. Alcuni chiamano *piano* il termine ab, chiamano *solido* il termine abc .. ec. Esponente delle dimensioni d'una lettera del dato termine, è il numero che esprime quante volte sia la data lettera ripetuta nel dato termine; nel termine $3aab$, l'esponente delle dimensioni di a è 2, e l'esponente delle dimensioni di b è l'unità. 2.° Quindi le dimensioni d'una lettera, o d'un termine, non dipendono da'coeficienti numerici. Se una lettera ha più d'una dimensione, si suole essa scrivere una sol volta, con alla destra in sito un po elevato l'indice delle sue dimensioni; invece di scrivere $3aab$, si scrive $3a^2b$; in certi casi è utile lo scrivere ancora l'unità per esponente delle dimensioni d'una semplice quantità incomplessa; *in vece di scrivere* $3a^2b$, si scrive $3a^2b^1$.

Origine, e natura delle quantità algebraiche positive, e negative.

6. Le quantità algebraiche che sono precedute alla sinistra dal segno + si chiamano quantità *affermative*, o *positive*, e quelle che sono precedute dal segno — si chiamano *defettive*, o *negative*. Ciò non basta per intendere a fondo la natura delle quantità positive e negative, e l'uso che si fa nell' algebra de' segni + —; prendiamo la cosa da' suòi veri principj.

7. Ad esprimere l'elevazione del Sole sopra l'Orizonte, si suole usare la serie naturale de' numeri 0. 1. 2. 3..... E' certo che quando il Sole sta all'Orizonte, l'elevazione sua sopra l'Orizonte è nulla, o zero; quando s'è alzato sopra l'Orizonte d'una determinata quantità presa per unità di paragone, per esempio d'un grado, la sua elevazione si può chiamare 1, e corso ch' egli abbia, alzandosi sempre più, un altro grado, la sua elevazione sarà 2, e così nel resto. Ad esprimere l'abbassamento del Sole sotto l'Orizonte, si può usare la stessa serie, essendo zero il suo abbassamento quando egli sta all' Orizonte, potendosi prendere

per

per 1 il suo abbassamento, quando egli si sia depresso d'un grado.... ec.

Quindi volendo riferire l'alzamento e l'abbassamento del Sole rispetto all' Orizonte alla medesima misura di gradi d'un circolo, dinotati successivamente co' termini della serie naturale o. 1. 2. 3...; si avrà sempre un' espressione ambigua, non intendendosi dal numero, per esempio, di 3 gradi, che il Sole si sia alzato o abbassato rispetto all' Orizonte di gradi tre. I numeri hanno costantemente la loro significazione assoluta di 3, di 4...., e da se non portano in conto alcuno la relativa d'essere l' 1 . 2.... preso piuttosto in questa, che in quella direzione, se non per qualche segno ad essi estrinseco, e preso ad arbitrio.

Per determinarla in qualche modo al numero de' gradi del moto, diretto ad una parte, si mette verso la sinistra il segno +, e quel numero de' gradi si chiama *positivo;* al numero de' gradi del moto, indirizzato alla parte opposta si mette verso la sinistra il segno —, e quel numero de' gradi si chiama *negativo*. Così il numero per se stesso esprimerà la quantità del movimento; il segno premesso al numero indicherà la direzione del movimento medesimo ad una delle parti opposte. Si dica lo stesso delle altre quantità (per esempio de' crediti e debiti d' un mercante; della sanità, o infermità di un cittadino...) che hanno tra se qualche opposizione, secondo un certo risguardo, non esprimibile da' puri numeri.

8. Quando due quantità sono tra se opposte secondo qualche rispetto, la prima esclude e nega l'altra secondo il rispetto medesimo; quindi la prima ha tratto il nome di quantità negativa, e la seconda di positiva. Ma siccome due quantità tra se opposte secondo qualche rispetto, si escludono e negano vicendevolmente secondo quel rispetto medesimo, si può prendere o l'una o l'altra per positiva, come più piace. Nell' esempio del.' elevazione o abbassamento del Sole, rispetto all' Orizonte, tanto il primo

si op-

ſi oppone al ſecondo, quanto queſto al primo movimento; amendue, o piuttoſto qualſivoglia dei due ſi può prendere per poſitivo, laſciando l'altro per negativo. Ordinariamente tralle quantità così oppoſte, ſi prende per poſitiva quella che ſi preſenta più naturalmente a conſiderarſi la prima; così l'elevazione del Sole ſopra l'Orizonte ſi ſuole prendere per movimento poſitivo, e l'abbaſſamento per negativo.

9. Non tutte le quantità hanno le ſue oppoſte, e quantunque una quantità abbia la ſua oppoſta, non è neceſſario di conſiderare queſta oppoſta quantità. Le quantità numeriche, in quanto ſono tali, non hanno quantità a ſe oppoſte; non il zero, che per non eſſere quantità non può dirſi oppoſto alle quantità; non le quantità minori del zero, che per non dare di ſe idea alcuna chiara e diſtinta, non poſſono neppure avere l'eſiſtenza nella immaginazione; non .... ec. Si può all'incontro conſiderare un alzamento del Sole ſecondo il ſuo accreſcimento numerico qualunque, ſenza avere alcun riſguardo alla quantità oppoſta, cioè all'abbaſſamento del Sole riſpetto all' Orizonte medeſimo: quando però ſi dice $-a$, queſta quantità non ha il ſuo eſſere di *meno*, che per l'apporſi che fa al $+a$. Quindi 1.º non tutte le quantità, in quanto ſono tali quantità, poſſono avere i ſegni $+\,-$, e le quantità, che non hanno il ſegno $-$ non ſempre ſono quantità poſitive, cioè non ſempre racchiudono nella loro idea l'oppoſizione ad altre quantità, nè ſi chiamano poſitive, ſe non perchè vengono conſiderate e poſte, dirò così, da ſe ſteſſe; propriamente dovrebbono chiamarſi *puri numeri*. 2.º Le quantità, che hanno il ſegno $-$ ſempre ſono quantità negative, cioè ſempre, e neceſſariamente preſuppongono, o importano l'idea d'oppoſizione ad altre quantità, nè ſono puri numeri, nè ſi ha di eſſe idea alcuna, ſe non vi s'attacchi qualche idea d'oppoſizione ad altre quantità. 3.º Tanto le quantità poſitive $+a$, quanto le negative $-a$ ſono quantità reali; da che $+a$ $-a$ non differiſcono, che ne'

ſegni,

fegni, i quali non mutano la natura di *a*, ma folamente *dinotano una diverfa denominazione ad effo eftrinfeca*, di direzione diverfa ... ec.

Regole de' fegni + — *nel Calcolo delle quantità pofitive, e negative.*

10. DAl fin qui detto è manifefto, che la quantità pofitiva, o negativa porta feco due ftati; cioè lo ftato di *numero*, e lo ftato di *qualche* oppofizione o contrarietà; fecondo il fuo ftato numerico, effa è una tale o tale altra quantità, 1. 2. 3... ec., fecondo il fuo ftato di oppofizione (che ben fi può chiamare ftato *fpecifico*) è di più *una cert' altra cofa oppofta ad un' altra fimile*, che per avventura fi fcuopra in una nuova data quantità. Lo ftato numerico d' una quantità fi dinota co' numeri 1. 2... ec.; lo ftato fpecifico della medefima fi indica co' fegni + —. Quindi nel calcolo delle quantità pofitive o negative, oltre al trovare i rifultati delle date quantità confiderate nel loro ftato numerico, è meftieri affegnare lo ftato fpecifico, in cui collocare fi debbano i rifultati, cioè il fegno + o — da premetterfi ai medefimi. Lo ftato numerico de' rifultati fi conofce dalle regole ordinarie del calcolo; lo ftato fpecifico de' medefimi fi conofcerà dalle regole feguenti.

11. Regole de' fegni. 1.° La quantità negativa aggiunta ad una negativa, la aumenta nella fua negazione, fottratta la fcema. 2.° La quantità negativa aggiunta ad una pofitiva la fcema nella fua pofizione, fottratta la aumenta. 3.° La quantità pofitiva aggiunta ad una negativa la fcema nella fua negazione fottratta la aumenta. 4.° La quantità pofitiva aggiunta ad una pofitiva la aumenta, fottratta la fcema. 5.° La quantità negativa di una negativa, o la pofitiva di una pofitiva *è una quantità pofitiva*, come pure la quantità pofitiva della negativa, o la negativa di una pofitiva *è una quantità negativa*. Queft' ultima proprietà delle quantità precedute da fegni + e — fi può efprimere così:

$- - = +$ .. meno il meno dà più
$+ + = +$ .... più il più dà più
$- + = -$ ... meno il più dà meno
$+ - = -$ .... più il meno dà meno.

Tutte queste regole de' segni sono conseguenze manifeste dall' idea di opposizione che regna nelle quantità precedute da' segni $+$ e $-$; basterebbe applicarle a qualche esempio d'alzamento e d'abbassamento del sole rispetto all'orizonte, per renderle chiare e palpabili anche alle persone più rozze, e volgari. Quale è lo stato contrario al *discendere?* certo è l'*ascendere;* ciò intendo di dire quando noto che *meno il meno dà più;* qual è.... ec.?

12. Quindi, e dalla natura della multiplicazione, e divisione si hanno le regole de' segni per la multiplicazione, e divisione delle quantità positive e negative, cioè:

$$- \overset{\times}{\div} - = + \qquad - \overset{\times}{\div} + = -$$
$$+ \overset{\times}{\div} + = + \qquad + \overset{\times}{\div} - = -$$

ossia i segni simili danno *più*, i segni dissimili danno *meno*. Imperciocchè; il multiplicatore non mostra solamente quante volte si debba a se stesso aggiungere il multiplicando, ma in quale stato ancora si debba riporre il prodotto; ed il divisore non solamente indica qual parte si debba prendere del dividendo, ma in quale stato si debba riporre questa parte medesima; conseguentemente, dovendosi questo stato intendere in ordine a quello in cui già si ritrova il multiplicando ed il dividendo, se essi sieno negativi, e collocare si debbano in uno stato negativo, il prodotto ed il quoto avranno uno stato negativo del negativo, cioè positivo, e se si debbano collocare in uno stato positivo, avranno uno stato positivo del negativo, cioè negativo. Se il multiplicando ed il dividendo sieno positivi, e collocare si debbano in uno stato negativo, il prodotto ed il quoto avranno uno stato negativo del positivo, cioè negativo, e se si deb-

ſi debbono collocare in uno ſtato poſitivo, avranno uno ſtato poſitivo del poſitivo, cioè poſitivo. Quindi lo ſtato del prodotto ab di $-a \times -b$ ſarà $- - = +$

di $-a \times +b$ ſarà $+ - = -$

di $+a \times -b$ ſarà $- + = -$

di $+a \times +b$ ſarà $+ + = +$. Lo ſtato del quoto $\frac{a}{b}$ per ... ec.

13. Quindi. Nella multiplicazione; 1.° Se il multiplicatore ſarà negativo, il prodotto avrà un ſegno contrario a quello del multiplicando. 2.° Se il multiplicatore ſarà poſitivo, il prodotto avrà il ſegno del multiplicando. 3.° Se le quantità a multiplicarſi ſaranno pari in numero, e ciaſcuna negativa, il prodotto ſarà poſitivo. 4.° Se ſaranno impari, e ciaſcuna negativa, il prodotto ſarà negativo. 5.° O ſieno pari, o ſieno impari in numero le quantità poſitive, il loro prodotto ſarà ſempre poſitivo.

Nella diviſione. 1.° Se il dividendo ſarà negativo, il ſegno del quoto ſarà contrario del ſegno al diviſore. 2.° Se il dividendo ſarà poſitivo, il ſegno del quoto ſarà conforme al ſegno del diviſore. 3.° ... ec. Queſte ed altre ſimili annotazioni, ſe non ſervono alla pratica del calcolo, ſervono a meglio conoſcere la natura de' ſegni.

14. Ma, come va (dicono alcuni) che i ſegni $+ -$ ſi uſano da' Matematici (e noi pure lo abbiamo indicato al num. 2.) per l'addizione e ſottrazione de' numeri? che hanno eſſe mai di comune le quantità aggiunte o ſottratte, colle quantità poſitive o negative? quali ſaranno le regole de' ſegni nel calcolo, non delle quantità poſitive e negative, ma delle quantità aggiunte e ſottratte? Queſti ſono i nodi, da' quali non ſanno ſvolgerſi i meno eſperti.

Due però ſono le riſpoſte: 1.° La natura de' numeri non eſige che vengan eſſi ad altri aggiunti o ſottratti; dunque il conſiderare i numeri nello ſtato di addizione o ſottrazione riſpetto ad altri numeri, è un fiſſare a' numeri medeſimi un nuovo ſtato ad eſſi eſtrinſeco; ſtato, che conſiderato in ordine

all' effetto che produce nelle quantità, alle quali vengono aggiunti, o dalle quali si sottraggono, è in se stesso perfettamente opposto. Certo che altra è la mutazione introdotta in una quantità per l'addizione, altra è quella che in essa si genera per la sottrazione d'un' altra quantità, e la prima è affatto opposta alla seconda: Se la prima è mutazione in accrescimento, che si può dire mutazione *in più*; la seconda è mutazione di scemamento, che si può dire mutazione *in meno*; dunque i numeri in quanto aggiunti ad altri si possono, e si devono considerare come quantità positive, in quanto da altri sottratti si possono, anzi si devono considerare come quantità negative; dunqne a quegli si dovrà premettere il segno +, a questi il —, e si dovranno maneggiare nel calcolo come le altre quantità positive e negative. Quindi è manifesto, che il calcolo delle quantità aggiunte o sottratte, non è che un *ramo* del calcolo delle quantità positive e negative; i segni + e — sono segni proprj a denotare lo stato di contrarietà, che regna tra due quantità date (queste quantità sono il *genus*), e per parità di ragione si devono appropriare alle quantità aggiunte e sottratte, che sono *species* di quelle prime.

2.° Si astragga per poco la mente da ciò che si è detto sulla natura delle quantità positive e negative, e sulle regole de' segni + —. Sia il + un mero segno arbitrario dell' addizione, ed il — un segno arbitrario della sottrazione; cerchiamo quali sieno le regole da osservarsi nel calcolo per le quantità insieme congiunte, o sottratte con questi segni.

Nella sottrazione. Sottraendo $14-3$ da 25, si ha $25-(14-3)$ $=25-14+3$. Imperciocchè dal numero 25 non vuolsi sottratto tutto il numero 14, ma il 14 sminuito di 3; dunque troppo piccolo è il residuo $25-14$, e tanto più piccolo, quanto il minutore 14 è più grande del dovere, cioè il residuo $25-14$ è più piccolo di 3 di quello dovrebbe essere; dunque per avere il vero residuo di $14-3$ sottratto da 25, conviene aggiungere 3 a $25-14$;

dunque

dunque $25 - (14 - 3) = 25 - 14 + 3$. Quindi $- + = -$
$- - = +$

similmente si avrà $25 + (14 - 3) = 25 + 14 - 3$; cioè $+ + = +$
$+ - = -$

Nella multiplicazione. Multiplicando $14 - 3$ per $5 - 2$, si ha $(14 - 3) \times (5 - 2) = (14 \times 5 - 3 \times 5) + (3 \times 2 - 14 \times 2)$. Imperciocchè, se il multiplicatore fosse l'intero numero 5, il prodotto sarebbe $(14 - 3) \times 5$; cioè non sarebbe l'intero numero 14, che dovrebbesi multiplicare per 5, ma il numero 14 sminuito di 3; dunque multiplicando 14 per 5 si multiplicherebbe per 5 anche il 3 che sta, e non dovrebbe esservi, nel numero multiplicando; dunque 14×5 sarebbe maggiore del dovere di tutto il numero 5×3; dunque il prodotto vero sarebbe $14 \times 5 - 5 \times 3$. Non è il numero intero 5 che deve multiplicare $14 - 3$, ma il numero 5 sminuito di 2; dunque nel prodotto $14 \times 5 - 5 \times 2$ c'è di più il prodotto di $14 - 3$ multiplicato per 2; dunque per avere il vero prodotto di $(14 - 3) \times (5 - 2)$ si deve dal prodotto $14 \times 5 - 5 \times 2$ sottrarre il prodotto di $(14 - 3) \times 2$, cioè si deve sottrarre $14 \times 2 - 3 \times 2$; dunque, per le regole date nell'esempio della sottrazione, il vero prodotto sarà $(14 \times 5 - 5 \times 3) + (3 \times 2 - 14 \times 2)$.
Quindi $+ \times + = +$; $- \times + = -$;
$- \times - = +$; $+ \times - = -$. Un simile discorso vale per la divisione.

15. Ecco adunque, che prendendo per segno arbitrario dell'addizione il $+$, e della sottrazione il $-$, dalla sola natura delle operazioni aritmetiche si hanno per il calcolo delle quantità sommate, e sottratte le stesse regole, che si ebbero già per le quantità positive e negative; dunque, quantunque le quantità sommate e sottratte non fossero da annoverarsi tralle quantità positive e negative, si dovrebbero maneggiare nel calcolo come le quantità positive e negative; cioè comunque diversi da $+ -$ fossero i segni dell'addizione e sottrazione, le loro regole nel cal-

colo sarebbero sempre analoghe alle regole de' segni + — presi per le sole quantità positive e negative; dunque e si possono prendere questi segni + — per indicare la somma e la sottrazione, e si possono, alle quantità sommate e sottratte, adattare le regole de' segni, dedotte prima per le quantità positive e negative.

16. La prima risposta è più decisiva, e leva ogni imbarazzo ne' calcoli; chi sostiene l'altra, dovrà in primo luogo sempre distinguere due generi di quantità positive e negative; cioè quello che viene dalla opposizione di stato, e quello che nasce dall' addizione e sottrazione delle quantità date. 2.° Dovrà nella risoluzione de' problemi esaminare ogni risultato che abbia il segno —, per conoscere se abbia questo segno perchè si richiami all' opposizione d'un' altra quantità simile che sia stata presa per positiva, o perchè ciò portino solamente le regole dell' addizione e sottrazione. Nel primo caso saprà l'uso che deve farsi del risultato, non lo saprà nel secondo, o se voglia anche nel secondo caso adattarvi le regole del primo, contraddirà col fatto alla sua dottrina. 3.° Commetterà poi un errore inescusabile e pericoloso, se vorrà ridurre l'idea delle quantità positive e negative del primo genere, all' idea delle quantità sommate, o sottratte, quasi che quella dipenda da questa. E' vero che il numero —3 gradi di elevazione del Sole si ha aggiungendo 8 gradi d'abbassamento, a 5 gradi d'elevazione del Sole medesimo, ma non è necessario per avergli ricorrere a questa somma; cioè a dire, è possibile, ma non è necessario, che quel —3 venga da un' addizione.

Riduzione delle quantità algebraiche.

17. La *riduzione* delle quantità algebraiche consiste nel disporre col miglior ordine, e sotto la più semplice espressione, le quantità algebraiche o date o trovate colle consuete operazioni del calcolo. Si osservino perciò le regole seguenti:

Re-

Regola prima. Le lettere di ciascun termine si dispongano, più che si può coll' ordine alfabetico.

Regola seconda. I termini delle quantità complesse si ordinino relativamente alle dimensioni di qualche lettera.

Regola terza. Si riducano ad una sola le quantità incomplesse simili, che per avventura si trovino co' segni simili in una complessa quantità data, e si ommettano quelle, che si distruggono o si elidono co' segni contrarj.

Regola quarta. Si conservi in ciascun termine la legge degli omogenei.

18. Per riguardo alla prima regola, è chiaro, che la quantità $acfbd$ si deve scrivere così $abcdf$, succedendo all' a nell' ordine alfabetico il b, e non il c, nè al b l'f, ma il c... ec S'è detto, che devonsi così disporre le lettere *per quanto si può*; cioè a dire quando ciò non turbi la seconda regola dell' ordinare le quantità complesse.

19. Per osservare con facilità questa seconda regola, si ordini primamente ciascun termine della quantità data per risguardo ad una lettera comune a molti; poi si passi ad ordinare i termini tra se, per risguardo alle dimensioni della lettera ordinante. Mi spiego: Nella quantità complessa $a^3 - 3abc + b^2c + 2a^2c - a^2b$ io osservo, che la lettera a è in tutt' i termini, fuorchè nel terzo; prendo ad arbitrio questa lettera a per distintivo de' termini medesimi, e sì gli dispongo, che la lettera a stia in ciascuno di questi più verso la mano destra, che non le altre; scrivo a cagione d'esempio non $-a^2b$, ma $-ba^2$; non $-3abc$, ma $-3bca$..., così sarà ordinato ciascun termine della quantità proposta. Per ordinare tra di loro i termini medesimi, scrivo per primo termine verso la sinistra quello, in cui la lettera a si trova alla maggior dimensione; scendendo verso la destra scrivo quello, in cui quest' istessa lettera a si trova alla dimensione prossimamente minore della prima...., e così successivamente, fino a quegli

che

che non contengono la lettera a; questi saranno gli ultimi. Ordinando la predetta quantità complessa, si avrà $a^3 + 2ca^2 - ba^2$ $- 3bca + b^2$.

20. Nelle quantità così ordinate per rapporto alle dimensioni d'una lettera, si chiama *termine* il complesso di tutte quelle quantità incomplesse, in cui la lettera che le distingue, ascende al medesimo numero di dimensioni, e tutte queste quantità incomplesse, si scrivono l'una sotto l'altra; la quantità precedente conterrà dunque soli quattro termini, e si scriverà così $a^3 + 2ca^2 - 3bca + b^2c$; per non iscostarsi dalla deffinizione
$- ba^2$
della parola *termine* data sopra, si consideri l'aggregato di tutte le quantità incomplesse che stanno a sinistra di a^2 nella quantità così ordinata, come coeficiente di a^2; si vedrà in appresso che si ha $2ca^2 + ba^2 = (2c + b).a^2$.

21. Talvolta gli esponenti delle dimensioni della lettera che distingue i termini non vanno da sinistra a destra sminuendo successivamente d'un unità. In questo caso, se sia eguale la differenza del primo esponente al secondo, del secondo al terzo,.... si supporrà bene ordinata la quantita data, altrimenti si metterà frammezzo un asterisco ✳, o un altro segno simile per supplire le veci del termine che manca: la quantità $a^6 + b^3a^4 - b^4a^2 + b^6$ è bene ordinata per a, ma ordinandola per b, si avrà b^6 ✳ $- a^2b^4$ $+ a^4b^3$ ✳ ✳ $+ a^6$, ed in questa quantità, il secondo, il quinto, ed il sesto termine sono eguali a zero, o più veramente a $\pm$ zero multiplicato per b^5 nel secondo, per b^2 nel quinto, e per b^1 nel sesto termine.

22. E' manifesto che la terza regola per le riduzioni abbraccia tre casi. 1.° Le quantità incomplesse simili, che hanno il medesimo segno, si riducono ad una sola che ha il segno comune alle date, e per coeficiente la somma de' coeficienti delle medesime. La quantità $2a^2 + 3b + a^2$ si riduce a $(2+1)a^2$

+

$+ 3\,b = 3\,a^2 + 3\,b$. 2.° Se queste incomplesse quantità simili hanno i segni contrari, il segno della quantità maggiore sarà il segno della ridotta, che avrà per coeficiente la differenza de' coeficienti delle quantità date. La quantità $3\,a\,b^3 + 2\,a\,b^2 - a\,b^3$ si riduce a $(3 - 1)\,a\,b^3 + 2\,a\,b^2 = 2\,a\,b^3 + 2\,a\,b^2$. 3.° Quindi se i coeficienti delle quantità simili che hanno i segni contrarj sono tra se eguali, si ommettono interamente le quantità date; $3\,a\,b + 2\,c\,d - 3\,a\,b = 2\,c\,d$.

23. Si dicono di *dimensioni omogenee* quelle quantità incomplesse, che hanno il medesimo numero per esponente delle dimensioni; di *dimensioni eterogenee* le altre. La quantità $a\,b$ è omogenea a $c\,d$, e siccome detto è, che i coeficienti non mutano le dimensioni d'una quantità, così non ne turbano l'omogeneità, o vi siano, o manchino nelle quantità date; $4\,a\,b$ è omogeneo con $10\,c\,d$. Quindi in una equazione sono omogenei i termini che la compongono, quando la somma delle dimensioni delle lettere in ciascun termine, è eguale alla somma degli esponenti delle lettere negli altri. L'equazione $a^2\,x^2 + a^2\,y^2 = 0$ è omogenea. E' molto necessario, massime nella soluzione de' problemi, il rendere omogenei tutt' i termini d'un equazione, o d'una complessa quantità; ciò si chiama *conservare*, ovvero *osservare la legge degli omogenei*.

24. Due sono i metodi più usati per ridurre all'omogeneità i termini d'una data quantità complessa. Primo metodo, per mezzo dell'unità. Si moltiplichi il termine che ha minori dimensioni, o si divida quello che ne ha maggiori, per l'unità, fatta eguale a qualche lettera che non entri nella quantità data, o che tralle date si possa prendere per l'unità. A rendere omogenei i termini di $a\,b\,c + c\,d$, si multiplichi $c\,d$, o si divida $a\,b\,c$ per $f = 1$; si avrà nel primo caso $a\,b\,c + c\,d\,f$, e nel secondo caso $\frac{a\,b\,c}{f} + c\,d$.

o che

Secondo metodo, per mezzo delle ſoſtituzioni. Egli è chiaro, anche ſenza avvertirlo, che in una quantità qualunque, invece d'una o più lettere, ſe ne può inſerire una o più altre, che ſieno, o ſi ſuppongano eguali a quelle; appunto come ſe la diſtanza da un luogo ad un altro ſia di due teſe lineari, ſi può egualmente dire che è di dodici piedi lineari. Su queſto principio (chiamato *principio di ſoſtituzione*) ſi fondano tutte quaſi le regole dell'Analiſi; vero è che per fare le ſoſtituzioni nelle quantità algebraiche, è uopo ſapere prima il calcolo delle medeſime; ma noi accenniamo qui il metodo di cui abbiſogniamo nel decorſo, la pratica la riſervi ciaſcuno a miglior luogo. Nella quantità $a + bxy \div cx^2 y^2 + ex^3 y^3$, ſi faccia $y = \frac{1}{z}$ ſi avrà $a \div \frac{bx}{z} + \frac{cx^2}{z^2} + \frac{ex^3}{z^3}$ quantità omogenea; nella quantità $x^2 + z^2 + az$, ſi faccia $z^2 = y^2$, ſarà $x^2 + y^2 + az$ quantità omogenea.... ec. Colle ſoſtituzioni ſi rendono omogenei i termini maſſime nelle equazioni, col cambiare gli eſponenti della equazione propoſta, con una certa legge; e ſi può determinare in quai caſi, e con quali ſoſtituzioni ſi debbano o poſſano fare ſomiglianti traſformazioni, ciocchè non ſi può qui ſpiegare più a lungo.

25. Reſta a dimoſtrare, che ne' metodi precedenti le quantità $\frac{bx}{z}$, $\frac{cx^2}{z^2}$, e ſimili ſiano d'una ſola dimenſione, e lo ſteſſo argomento varrà per gli altri caſi. Ciò dipende dal teorema generale per trovare l'eſponente delle dimenſioni d'una frazione algebraica; egli è il ſeguente. L'eſponente delle dimenſioni di una frazione algebraica è eguale al reſiduo, che ſi ha ſottraendo l'eſponente delle dimenſioni del denominatore dall' eſponente delle dimenſioni del numeratore; queſto teorema ſi dimoſtra facilmente così: ab, che è un prodotto de' due fattori a, b, è di due dimenſioni, e ſe ſi divida ab per uno de' fattori a, reſta b

per

per quoziente che è d'una sola dimensione; dunque quante sono le dimensioni al denominatore d'una frazione, altrettante se ne elidono al numeratore, e l'esponente delle dimensioni residue è la differenza de' detti esponenti; dunque le dimensioni d'una frazione sono indicate dalla detta differenza; quindi è, che essendo due le dimensioni al numeratore di $\frac{bx}{x}$, ed una al denominatore, l'esponente delle dimensioni di $\frac{bx}{x}$ sarà 2—1, cioè l'unità, e così nel resto.

26. Si noti 1.° Che se il denominatore avrà più dimensioni che il numeratore, l'esponente delle dimensioni delle frazioni sarà negativo; e se il denominatore avrà egual numero, o un numero minore di dimensioni che il numeratore, l'esponente delle dimensioni della frazione sarà zero, o positivo. Le frazioni d'esponente negativo si chiamano, da Eulero, e da altri, *frazioni proprie*. 2.° Che colle regole date, ed applicate solamente alle quantità incomplesse, si conosce l'esponente delle dimensioni d'una quantità complessa; il numero de' fattori, che la compongono, (che sono rappresentabili da a, b, c, ec.) è l'esponente delle sue dimensioni. Dimostreremo altrove, che in una quantità omogenea, ed ordinata per una lettera, il numero de' fattori componenti è eguale all' esponente massimo di quella lettera; così $x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3$ è di tre dimensioni. 3.° Quindi si ha l'esponente delle frazioni, che hanno per numeratore, e per denominatore una quantità complessa.

CAPO SECONDO.

Leggi del Calcolo nelle quantità algebraiche.

Calcolo nelle quantità intere.

27. ADdizione. Si ſcrivano tutte le date quantità in una ſola ſerie, da ſiniſtra a deſtra, ritenendo il ſegno dato a ciaſcun termine; ſi facciano ſu queſta ſerie le riduzioni del n. 22. Per ſommare $a+bc$ con $bc-a$, ſi ſcriva $a+bc+bc-a$, e riducendo ſi avrà $2bc$.

28. Sottrazione. Si mutino tutti i ſegni nel minutore, e ſi ſommino inſieme tutte le date quantità. Per ſottrarre $ac-b$ da $d+b+ac$, ſi mutino i ſegni ad $ac-b$, e ſommando $-ac+b$ con $d+b+ac$, ſi avrà $d+2b$.

29. Multiplicazione. Per le quantità incompleſſe, conviene trovare il prodotto delle lettere, il prodotto de' coeficienti numerici, ed il ſegno da premettervi. Per le lettere, baſta congiungere le lettere delle quantità a multiplicarſi colle lettere dell' altra quantità, ſenza interporvi alcun ſegno; per i coeficienti numerici ſervono le regole della volgare aritmetica ne' numeri; per i ſegni ritenganſi le regole ſopra dimoſtrate, cioè che il ſegno del prodotto è $+$, ſe ſono ſimili i ſegni delle quantità date, e che il ſegno del prodotto è $-$ ſe i ſegni delle date quantità ſono diſſimili. Multiplicando $4bc$, oſſia $+4bc$ per $-5ad$, ſi avrà 1.° Per le lettere $bc \times ad = abcd$; 2.° Per i coeficienti $4 \times 5 = 20$; 3.° E per ſegno del prodotto $20abcd$ ſi ha $- \times + = -$; cioè $4bc \times -5ad = -20abcd$.

Per le quantità compleſſe, finitinomie, ed indefinitinomie. Si multiplichino colle regole precedenti tutt' i termini d'una delle date quantità per ciaſcun termine dell' altra; ſi faccia la ſomma di tutt' i parti-

particolari prodotti. Multiplicando $a-b$ per $c-d$, si avrà $(a-b)(c-d)=(a-b)\times c+(a-b)\times -d=(ac-bc)+(bd-ad)$.

30. Divisione. Per le quantità incomplesse. Il coeficiente numerico del quoziente, si ha colle regole dell'aritmetica numerica; il segno del quoto si ha come nella multiplicazione; per le lettere; si scrivano le lettere del divisore sotto le lettere del dividendo a modo di frazione; si scancellino le lettere comuni ad amendue i termini; così $+6bc$ diviso per $-3c$, dà per segno del quoto $+\div-=-$; per coeficiente del quoto $\frac{6}{3}=2$, e per le lettere $\frac{bc}{c}=b$; cioè $6bc\div-3c=-2b$. Ho detto di scancellare le lettere comuni; dacchè è evidente, che bc è eguale a b multiplicato per c; dunque dividere bc per c significa dividere un prodotto per uno de' suoi fattori, che anche nella aritmetica numerica dà l'altro fattore per quoto.

Per le quantità complesse finitinomie. Si ordini il dividendo ed il divisore per una istessa lettera; si divida il primo termine del dividendo per il primo termine del divisore; si sottragga dal dividendo, il prodotto del quoto in tutto intero il divisore; e sulle quantità residue si rifaccia la stessa operazione, fino ad avere zero per residuo, o una quantità non più divisibile per il divisore, da scriversi a modo di frazione a compimento del quoto, come ne' numeri. A dividere a^2-b^2 per $a+b$, stando amendue le quantità ordinate per a; si divida il primo termine a^2 del dividendo per il primo termine a del divisore, e si scriva a per quoto; sottraendo da a^2-b^2 il prodotto di $a+b$ in a, si ha $-ab+b^2$ per residuo, su cui operando come se fosse un nuovo dato dividendo, si avrà $-b$ per secondo ed ultimo termine del quoziente.

Per le quantità complesse infinitinomie. Si stabilisca prima d'ogn'altra cosa il numero de' termini, che si vogliono avere nel quoziente, e si scrivano altrettanti termini del dividendo A, e del divisore B al luogo della divisione; si ordinino al contrario delle quantità finite (cioè si metta per primo termine quella quantità

incompleſſa, in cui la lettera, che diſtingue i termini, aſcende al più piccolo numero di dimenſioni), e ſi operi come nelle quantità finite.

Calcolo delle quantità intere per mezzo degli eſponenti.

31. Si chiama *calcolo delle quantità intere per mezzo degli eſponenti* il calcolo delle quantità, che hanno la forma a^m, a^n, fatto per mezzo de' loro eſponenti. Le regole di queſto calcolo ſono ſoltanto per la multiplicazione e per la diviſione, e ſi deducono da n. 29. 30. Dal n. 29. ſi ha $a^3 \times a^2 = aaa \times aa = aaaaa = a^5$; ma $a^5 = a^{3+2}$; dunque $a^3 \times a^2 = a^{3+2}$ quindi $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

Dal n.30. $a^5 : a^3 = \frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2$; ma $a^2 = a^{5-3}$; dunque $a^5 : a^3 = a^{5-3}$; quindi $a^m : a^n = a^{m-n}$
Cioè la ſomma degli eſponenti m, n, è l'eſponente del prodotto di a^m a^n, e la differenza dell'eſponente n dall'eſponente m è l'eſponente del quoto di $\frac{a^m}{a^n}$

32. Quindi l'eſponente delle dimenſioni di a può eſſere poſitivo, negativo, o zero, ſecondo che in a^{m-n} ſarà n minore, maggiore, o eguale ad m. Quindi ancora 1.° $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; 2.° $a^0 = 1$; dacchè multiplicando a^{-m} ed $\frac{1}{a^m}$ per la ſteſſa quantità a^{2m}, ſi ha $a^{-m} \times a^{2m} = a^m$; $\frac{1}{a^m} \times a^{2m} = a^m$: Ed $a^0 \times a^m = a^{0+m} = a^m$; cioè multiplicando una quantità per a^0, non ſi muta il valore che aveva prima, ciocchè è proprio dell'unità. Queſte due ultime propoſizioni, ſi provano ancora altrimenti così: $\frac{a^5}{a^7} = \frac{1}{a^2}$; ma $\frac{a^5}{a^7} = a^{5-7} = a^{-2}$; dunque $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; inoltre

noltre

noltre $\frac{a^5}{a^5} = 1$; ma $\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0$; dunque $a^0 = 1$.

Nota. La potenza a^{-n} sta al numeratore della frazione $\frac{a^{-n}}{1}$ che è eguale alla frazione $\frac{1}{a^n}$ in cui a^n stà al denominatore; or questa opposizione di sito, che passa trallo stare al numeratore, e lo stare al denominatore d'una frazione, viene acconciamente disegnata dal segno dell'esponente, che in un caso è $+$, e nell' altro $-$. Vedi Fontenelle (*Geom. de l'infini n.* 480.)

Calcolo nelle frazioni.

33. RAppresentando due qualunque frazioni con $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, si avranno le seguenti formole.

Addizione. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

Sottrazione. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$

Multiplicazione. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Divisione. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

34. Esitano alcuni sulla regola per la divisione; ecco come si dimostra. Suppongo che multiplicando i termini d'una frazione per una stessa quantità, non si muta il valore della frazione; così $\frac{1}{2}$ è eguale a $\frac{2}{4}$, cioè a $\frac{1 \times 2}{2 \times 2}$; Suppongo innoltre che la vera espressione del quoto di due quantità sia una frazione che ha il dividendo per numeratore, ed il divisore per denominatore; Or dico, che per dividere una frazione per un' altra, si devono rovesciare i termini del divisore, e multiplicare il dividendo, per il divisore così ridotto; cioè che

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Imperciocchè $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, e multiplicando i termini di quest' ultima frazione per il prodotto de' denominatori delle date, cioè per bd, si ha $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{abd}{b}}{\frac{bcd}{d}} = \frac{ad}{bc}$.

Calcolo delle frazioni per mezzo degli esponenti.

35. S'E' già notato (num. 32.) che il segno —, messo avanti l'esponente d'una quantità qualunque dinota opposizione di sito, cioè che la data quantità fatta d'esponente positivo appartiene a quel termine della frazione, che è opposto al termine, in cui trovasi essa collocata; giusta la natura del segno —, che indica sempre qualche opposizione, o contrarietà, a differenza del +, che nell'uso dinota talvolta una semplice posizione d'una qnantità; quindi $\frac{a^m}{a^n} = a^m \times a^{-n}$

$$\frac{a^m}{a^{-n}} = a^m \times a^n$$

36. Quindi si ha un metodo per calcolare la quantità intere a modo di frazioni, e le frazioni a modo delle quantità intere; ma per fermarci solamente nelle frazioni, si ha:

Addizione. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = ab^{-1} + cd^{-1}$

Sottrazione. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = ab^{-1} - cd^{-1}$

Multiplicazione. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = ab^{-1} \times cd^{-1}$

Di-

Divisione. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ab^{-1} : cd^{-1}$

37. Quindi si ha un'elegante dimostrazione delle ordinarie regole per la multiplicazione e divisione nelle frazioni.
1.° $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; dacchè $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = ab^{-1} \times cd^{-1} = acb^{-1}d^{-1}$ $= \frac{ac}{bd}$. 2.° $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$; dacchè $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ab^{-1} : cd^{-1}$ $= \frac{ab^{-1}}{cd^{-1}} = \frac{ad}{bc}$.

Estrazione delle radici dalle quantità Algebraiche.

38. DAto il prodotto d'una quantità sconosciuta qualunque, e continuatamente multiplicata per se stessa un dato numero di volte; trovare la quantità multiplicata. Il dato prodotto si chiama *potenza* della quantità che si cerca; la quantità che si cerca si chiama *radice* della potenza il dato numero di volte per cui s'è fatta la multiplicazione, si chiama *esponente* del grado della potenza, e della radice. Rappresentando per a qualunque quantità complessa, o incomplessa, intera, o rotta, sarà $a \times a$ la seconda potenza di a, ed a la radice seconda di $a \times a$; $a \times a \times a$ sarà la terza potenza di a, ed a la radice terza di $a \times a \times a$ . . . ec.

39. La soluzione del presente problema di trovare, od estrarre la radice da una data potenza, non ha difficoltà alcuna per le quantità incomplesse; è evidente 1.° Che la potenza d'una quantità incomplessa è il prodotto delle potenze de' suoi fattori; la seconda potenza di bc, è $bc \times bc = b^2 c^2$, e ciò torna allo stesso che moltiplicare per l'esponente della potenza cercata l'esponente di ciascun fattore della quantità data; per converso adunque ad estrarre la radice d'esponente dato da una potenza in-

com-

complessa, si dovrà dividere l'esponente di ciascun fattore per l'esponente della radice cercata; così la radice seconda di $b^2 c^2$, è $b^{\frac{2}{2}} c^{\frac{2}{2}} = bc$.

E' evidente in 2.° luogo che le potenze d'esponente pari d'una quantità negativa, e le potenze di esponente pari o impari d'una quantità positiva sono sempre positive; e che le potenze d'esponente impari d'una quantità negativa sono sempre negative; quindi per converso le radici d'esponente impari d'una potenza negativa sono negative; le radici d'esponente impari d'una potenza positiva sono positive; le radici d'esponente pari d'una potenza positiva sono e positive e negative; e le radici d'esponente pari d'una potenza negativa non sono nè positive, nè negative, cioè sono immaginarie, ovvero impossibili.

Finalmente 3.° quanto a' coeficienti; se i coeficienti delle date potenze incomplesse di grado n non sono composti più di un numero n di figure, cercando tralle potenze delle semplici figure aritmetiche il coeficiente della data quantità, si troverà senza pena la sua radice; serve a ciò la Tavola prima delle potenze de' numeri semplici. Se i coeficienti delle date potenze incomplesse sono composti di più figure che non sono unità in n, si dovrà cercare la loro radice coi metodi delle potenze complesse.

Cercando la radice seconda di $36\, b^4 c^4$, si avrà 1.° $b^{\frac{4}{2}} c^{\frac{4}{2}} = b^2 c^2$; 2.° La radice seconda di 36 è 6; il segno è $\pm$; cioè disegnando col segno $\sqrt{}$ la radice seconda cercata; si avrà $\sqrt{36\, b^4 c^4} = \pm 6\, b^2 c^2$.

40. L'estrazione delle radici nelle quantità complesse si deduce dalla formazione delle potenze nelle quantità medesime; bastano però a servire di formole le potenze d'un binomio qualunque rappresentato per $a+b$. Si multiplichi $a+b$ per se stesso, e si avrà la seconda potenza di $a+b$; si multiplichi la seconda po-

P

' nun

potenza .

m.
)

1

t.$\frac{a}{}$

7 a
28 a^2
34 a^3
10 a^4

resid
segn
cede
4.°
data
tare
quad

potenza di $a+b$ per la ſua radice, e ſi avrà la terza potenza di $a+b$... come nella tavola ſeconda. Per vedere l'uſo di queſte formole per l'eſtrazione delle radici, ſia meglio applicarle ad un eſempio.

Si cerchi la radice ſeconda di $x^2+2bx+2ix+2bi+b^2+i^2$ ordinata per x. La ſeconda potenza di $a+b$ è $a^2+2ab+b^2$; diſcorro così: 1.° Per avere la prima parte della radice di queſta formola, che altronde ſo eſſere a, baſta eſtrarre la radice ſeconda dal primo termine a^2 della formola medeſima, ordinata per a; eſſendo $\sqrt{a^2}=a^{\frac{2}{2}}=a$; dunque per avere la prima parte della radice cercata, che è rappreſentabile per a, baſterà eſtrarre la radice ſeconda dal primo termine x^2, e ſi avrà x. 2.° Per avere la ſeconda parte radicale b della formola, baſta ſottrarre dalla medeſima il quadrato della prima parte a, e dividere il primo termine $2ab$ del reſſiduo $2ab+b^2$, per il coeficiente di b, cioè per $2a$; dunque per avere la ſeconda parte radicale cercata, che è rappreſentabile per b, ſi dovrà ſottrarre dalla data quantità il quadrato x^2 della prima parte x già trovata, e dividere il primo termine $2bx$ del reſſiduo $2bx+2ix+2bi+b^2+i^2$ per $2a$, cioè per $2x$; ſi avrà b. 3.° Sottraendo dal reſſiduo della formola il prodotto di b, multiplicato per la ſomma del diviſore, e della ſeconda parte radicale b, cioè ſottraendo $(2a+b)b$, ſi ha zero per reſiduo; dunque ſe la radice della data potenza è binomia, ſottraendo dal reſiduo predetto la quantità rappreſentata per $(2a+b)b$, cioè $(2x+b)b$, ſi dovrà avere zero per reſiduo; ed avendo invece il reſiduo $2xi+2bi+i^2$, ſi ha un ſegno ſicuro, che la radice cercata non è binomia, e che colle precedenti operazioni non ſi è avuta che una parte della radice cercata. 4.° E' però certo che queſto reſiduo è minore della quantità data di tutto intero il quadrato di $x+b$; ſi può adunque contare d'avere ſolamente fin qui ſminuita la data quantità del quadrato d'una ſola parte della radice che ſi cerca; dunque chia-

 man-

mando *parte prima* la parte trovata $x+b$, si potrà essa disegnare per l'a della formola, e per trovare l'altra parte b, si dovrà ricominciare dalla seconda operazione, cioè dal dividere il residuo $2ix+2bi+i^2$ per $2a$, ossia per $2x+2b$, e l'i, che si ha dalla divisione, sarà una nuova parte radicale. Sottraendo, come prima, dal residuo medesimo la quantità $(2a+b)b$, cioè $(2x+2b+i)i$, si ha zero per residuo, come nella formola; ciò è segno manifesto, che la radice cercata è $x+b+i$.

41. Se non si fosse avuto zero per residuo, si sarebbe ripetuta l'ultima delle precedenti quattro operazioni, fino a che, o si avesse zero per residuo, o l'ultimo residuo non fosse più divisibile per $2a$: Nel primo caso la quantità data sarebbe potenza *perfetta*, e la radice trovata sarebbe radice *finita*, o *razionale*; nel secondo la quantità data sarebbe potenza *imperfetta*, e la radice trovata sarebbe radice della massima potenza nascosta nella quantità data. Lo stesso è il metodo per l'estrazione delle radici più alte di grado n, ed è manifesto il modo d'applicare le formole alle intere quantità numeriche. Si separi, come è noto, il dato numero da destra a sinistra in classi di figure n per ciascuna; si operi su queste venendo da sinistra verso la destra, come su altrettanti termini d'una quantità complessa.

42. Per l'estrazione delle radici dalle frazioni, si rifletta, che il metodo universale per elevare ad una potenza qualunque una quantità data, applicato alle frazioni, si riduce ad alzare il numeratore, ed il denominatore della data frazione, alla potenza di grado dato; ciò fa conoscere, che ad estrarre una radice di grado dato da una frazione, basta l'estrarre la radice cercata da ciascuno de' termini della data frazione. Così $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$

Cal-

43. DAlle cose dette al n. 39. sui segni da premettersi alle radici incomplesse è manifesto, che si possono distinguere due generi di quantità radicali, cioè le quantità radicali *reali*, e le quantità radicali *immaginarie*; $\sqrt{4}$ è una quantità radicale reale; $\sqrt{-4}$ è immaginaria. Col metodo del n. 40. si può assegnare il valor vero di molte quantità radicali reali, come $\sqrt{4} = 2$; ma d'un infinità d'altre quantità radicali reali, non si può conoscere, che la radice della potenza massima, che vi sta dentro come nascosta, e chiusa; non si sa la radice seconda di 5, ma la radice della massima potenza seconda, che sta in 5 e 2; le quantità radicali reali delle quali si assegna il valor vero si chiamano *commensurabili*; le altre quantità radicali reali si chiamano *incommensurabili* o *sorde*. Grande è il profitto che se ne trae nell'analisi da queste quantità radicali, o reali, o immaginarie, sottomesse opportunamente alle leggi del calcolo; si disegnan' esse col segno $\sqrt{}$, scrivendo alla sinistra del medesimo, l'esponente della radice; $\sqrt[2]{a}$, o semplicemente $\sqrt{a}$, significa la radice seconda di a; $\sqrt[3]{a}$ significa la radice terza di a; $\sqrt[m]{a}$ significa la radice di grado m di a.

44. Racchiudo nelle seguenti formole tutte le regole del calcolo, pe' radicali reali.

Addizione. $\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} + \frac{r}{s}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{ps+qr}{qs}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$

Sottrazione. $\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} - \frac{r}{s}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{ps-qr}{qs}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$

Multiplicazione. $\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} \times \frac{r}{s}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{pr}{qs}\sqrt[m]{\frac{ac}{bd}}$

Divisione. $\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} : \frac{r}{s}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{ps}{qr}\sqrt[m]{\frac{ad}{bc}}$

Formaz.e delle potenze. $\left(\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\right)^{\frac{s}{v}} = \sqrt[\frac{mv}{s}]{\frac{p^m a}{q^m b}}$

Estrazione delle radici. $\sqrt[\frac{s}{v}]{\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[\frac{ms}{v}]{\frac{p^m a}{q^m b}}$

45. Per la dimostrazione di queste formole, conviene supporre, che, in vece di $\sqrt[m]{a}$ si può scrivere $a^{\frac{1}{m}}$; ciò discende naturalmente dal n. 39. Chi cerca la radice m di a, considera a come una perfetta potenza m d'una incognita quantità; quindi per le regole dimostrate al n. 39. si dovrà dividere l'esponente di a per l'esponente della radice cercata, e si avrà $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$. Da questo principio si hanno le dimostrazioni delle formole precedenti; l'applico ad una sola. Si cerca la radice di grado $\frac{s}{v}$ della quantità $\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q}\times\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}}$; si avrà $\sqrt[\frac{s}{v}]{\frac{p}{q}\times\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}}}$

$$=\frac{p^{\frac{v}{s}}\,a^{\frac{v}{ms}}}{q^{\frac{v}{s}}\,b^{\frac{v}{ms}}} = \frac{p^{\frac{mv}{ms}}\,a^{\frac{v}{ms}}}{q^{\frac{mv}{ms}}\,b^{\frac{v}{ms}}} = \frac{p^{m:\frac{ms}{v}}\,a^{1:\frac{ms}{v}}}{q^{m:\frac{ms}{v}}\,b^{1:\frac{ms}{v}}} = \sqrt[\frac{ms}{v}]{\frac{p^m a}{q^m b}}$$

46. Per le quantità radicali complesse, miste, o non miste di quantità commensurabili, o razionali come $a\ b\ldots$ si osservino le stessissime leggi, che si sono date per le quantità intere; per non imbarazzarsi nel decorso del calcolo di tanti segni radicali, l'uno sull'altro ammucchiati, e stretti insieme, si sostituiscano nelle quan-

quantità date de' ſimboli interi, a, b...ec., e nel prodotto ſi rimetta il loro primo valore.

47. Anche le quantità immaginarie incompleſſe, e compleſſe, miſte, o no, di quantità reali ſoggiacciono alle ſteſſe regole del calcolo delle reali quantità. Si oſſervi però che le quantità che ſtanno ſotto il ſegno ſi poſſono ſempre conſiderare come quantità poſitive, ma multiplicate per -1; così $\sqrt{-a} = \sqrt{-1.a}$, e dalle formole del n. 44. $\sqrt{-1.a} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1}$. Prima dunque di fare le conſuete operazioni del calcolo, o almeno quelle, che dipendono dalla multiplicazione, e dalla diviſione, ſi ſeparino, come nell'eſempio addotto, le quantità immaginarie, e ſi mantengano più che ſi può le $\sqrt{-1}$ anche ne' riſultati, finchè non vengano cancellate, o tolte da un altra $\sqrt{-1}$ introdotta nel calcolo da qualche multiplicazione, e diviſione.

Multiplicazione. $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{-1.a} \times \sqrt{-1.b}$
$= \sqrt{a}\ \sqrt{-1} \times \sqrt{b}\ \sqrt{-1} = \sqrt{a}\ \sqrt{b} \times \sqrt{-1}$
$= \sqrt{ab} \times -1 = -\sqrt{ab}$

Diviſione. $\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \sqrt{-a} : \sqrt{-1.b} = \sqrt{a}\sqrt{-1}\ \sqrt{b}\sqrt{-1} =$
$\dfrac{\sqrt{a}\ \sqrt{-1}}{\sqrt{b}\ \sqrt{-1}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Per gli eſponenti. $\sqrt[n]{-a^m} = \sqrt[n]{-1.a^m} = \sqrt[n]{a^m}\ \sqrt[n]{-1}$
$= \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{-1} = a^{\frac{m}{n}}\ \sqrt[n]{-1}$; ſi noti 1.º che n indica un numero pari; 2.º che a ragione ſi ſuppone $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$; dacchè nell'eſpreſſione di $\sqrt{-1}$ ſi conſideri -1 come quadrato.

48. Si è ſempre ſuppoſto nelle precedenti formole che le quantità radicali date per la ſomma, e ſottrazione, abbiano quantità ſimili ſotto i ſegni, e che gli eſponenti de' ſegni radicali foſſero in tutte le operazioni ſempre gli ſteſſi in ciaſcuna delle date quantità. Quando le quantità, che ſtano ſotto i ſegni non foſſero ſimili, non ſi potrebbe fare altro che in-

indicare col $+-$ la somma, o la sottrazione cercata; ma quando gli esponenti delle date quantità radicali fossero diversi, v'hanno acconcie regole per ridurgli allo stesso esponente; queste appartengono alle riduzioni de' radicali, che noi per ultimo mettiam qui per ristretto, anche ad esercizio di calcolo.

Riduzioni nelle quantità radicali.

49. Ridurre una quantità radicale alla sua più semplice forma.

Formola. $\sqrt[m]{\frac{a^m c}{b^m d}} = \frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$.

Si cerchino tutti i divisori della quantità, che sta sotto il segno; si estragga la radice m da quegli che sono potenze perfette di m; si metta fuori del segno, a modo di coeficiente, il prodotto di queste radici, ed il prodotto degli altri divisori si lasci solo sotto il segno.

Dim. $\sqrt[m]{\frac{a^m c}{b^m d}} = \frac{a^{\frac{m}{m}} c^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{m}{m}} d^{\frac{1}{m}}} = \frac{a}{b} \times \frac{c^{\frac{1}{m}}}{d^{\frac{1}{m}}} = \frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$.

50. Ridurre una quantità qualunque sotto qualunque segno radicale.

Formola. $\frac{a}{b} = \sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}}$.

Si alzi la quantità data alla potenza d'esponente eguale all'esponente del segno dato; si metta questa potenza sotto il dato esponente.

Dim. $\frac{a}{b} = \frac{a^{\frac{m}{m}}}{b^{\frac{m}{m}}} = \sqrt[m]{\frac{a^m}{b^m}}$.

51. Ridurre una quantità qualunque ad un prodotto d'un numero qualunque m di quantità radicali. For-

Formola. $\frac{a}{b}=\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\sqrt[m]{}$ ... ec. m in numero.

Si ſcriva la quantità data ſotto il ſegno $\sqrt[m]{}$; ſi congiunga inſieme co' noti ſegni di multiplicazione un numero m di queſte quantità radicali.

Dim. Se $m = 4$; Sarà

$$\frac{a}{b}=\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\right)^4=\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a}{b}}.$$

52. Mettere fuori del ſegno qualunque quantità algebraica x di qualunque termine, per eſempio del primo, d'una data quantità radicale compleſſa.

Formola. $g\,x\sqrt[m]{a\,x+b\,x^n}=g\,x^{1+\frac{1}{m}}\sqrt[m]{a+b\,x^{n-1}}$.

Si cerchi la radice m della quantità x; per queſta radice ſi divida la quantità compleſſa, che ſta ſotto il ſegno, e ſi multiplichi il coeficiente del ſegno radicale.

Dim. $\sqrt[m]{x}=x^{\frac{1}{m}}$; dunque $g\,x\sqrt[m]{a\,x+b\,x^n}=g\,x\,.\,x^{\frac{1}{m}}\frac{\sqrt[m]{a\,x+b\,x^n}}{\sqrt[m]{x}}$

$= g\,x^{1+\frac{1}{m}}\sqrt[m]{a+b\,x^{n-1}}$.

53. Mettere al numeratore d'una quantità, che ſta fuori del ſegno, qualunque quantità data.

Formola. $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot g\sqrt[m]{\frac{c}{d\,g^m}}$.

Si multiplichi per la data quantità il coeficiente del dato radicale; ſi alzi la medeſima quantità data alla potenza d'eſponente eguale all' eſponente del radicale dato, e per queſta potenza ſi divida la quantità, che ſta ſotto il ſegno.

Dim.

Dim. $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot g\cdot \frac{\sqrt[m]{\frac{c}{d}}}{\sqrt[m]{g^m}} = \frac{ag}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{dg^m}}$.

54. Mettere al denominatore della quantità, che ſta fuori del ſegno, qualunque quantità data.

Formola. $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{bg}\sqrt[m]{\frac{cg^m}{d}}$.

Si divida il coeficiente del dato radicale per la quantità data; ſi alzi la medeſima quantità data alla potenza d'eſponente eguale all' eſponente del radicale dato, e per queſta potenza ſi moltiplichi la quantità, che ſta ſotto il ſegno del dato radicale.

Dim. $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{g}\cdot g\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$

$= \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{g}\sqrt[m]{g^m}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{bg}\sqrt[m]{\frac{cg^m}{d}}$.

55. Ridurre una data quantità radicale ad un ſegno d'eſponente n maggiore, o minore dell' eſponente dato m.

Formola. $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c^{\frac{n}{m}}}{d^{\frac{n}{m}}}}$.

Si divida l'eſponente del ſegno cercato per l'eſponente del ſegno dato; ſi alzi la quantità, che ſta ſotto il dato ſegno alla potenza d'eſponente eguale al quoto di queſta diviſione. Si metta queſta potenza ſotto il ſegno cercato preceduto dal coeficiente del ſegno dato.

Dim. $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{c^{\frac{1}{m}}}{d^{\frac{1}{m}}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{c^{\frac{n}{mn}}}{d^{\frac{n}{mn}}} = \frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c^{\frac{n}{m}}}{d^{\frac{n}{m}}}}$.

56. Ri-

56. Ridurre ad una quantità intera la quantità rotta, che per avventura si trovi sotto il segno d'una data quantità radicale.

Formola. $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{bd}\sqrt[m]{cd^{m-1}}$.

Si divida il coeficiente del dato radicale per il denominatore della frazione, che sta sottò il segno; si alzi il denominatore medesimo alla potenza d'esponente eguale all' esponente del dato segno; per questa potenza si multiplichi la frazione, che sta sotto il segno.

Dim. $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{c^{\frac{1}{m}}}{d^{\frac{1}{m}}} = \frac{a}{bd}\cdot\frac{c^{\frac{1}{m}}\,d^{\frac{m}{m}}}{d^{\frac{1}{m}}} = \frac{a}{bd}\sqrt[m]{\frac{cd^{m}}{d}}$

$= \frac{a}{bd}\sqrt[m]{cd^{m-1}}$.

57. Ridurre qualunque numero di quantità radicali al medesimo segno.

A.

Formola. $\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q}\sqrt[mn]{\frac{a^{n}}{b^{n}}}$.

$\frac{r}{s}\sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \frac{r}{s}\sqrt[mn]{\frac{c^{m}}{d^{m}}}$.

Si multiplichi l'esponente di ciascun segno radicale *A* per il prodotto degli esponenti degli altri segni; e si alzi la quantità, che sta sotto il segno *A*, alla potenza d'esponente eguale a questo stesso prodotto.

Dim. $\frac{p}{q}\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{p}{q}\cdot\frac{a^{\frac{1}{m}}}{b^{\frac{1}{m}}} = \frac{p}{q}\cdot\frac{a^{\frac{n}{mn}}}{b^{\frac{n}{mn}}} = \frac{p}{q}\sqrt[mn]{\frac{a^{n}}{b^{n}}}$, e per la

ſteſſa ragione $\frac{r}{s} \sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \frac{r}{s} \sqrt[mn]{\frac{c^m}{d^m}}$.

58. Per la traſformazione del num. 49. è neceſſario ſapere trovare tutti i diviſori d'una data quantità. Egli è facile il trovare i diviſori incompleſſi, ſemplici, e compoſti d'una data quantità: Si divida la data quantità per la più piccola, o più ſemplice quantità, della quale ſi veda compoſto la data quantità X; Si divida il quoto X' per la medeſima quantità.... fino a che qualcuno de' quoti X'' non poſſa più dividerſi per l'aſſunto diviſore. Si divida X'' per la più ſemplice delle quantità componenti, e ſi ripeta la medeſima operazione ſu i nuovi quoti X''', fino a trovarne uno non diviſibile eſattamente, che per ſe ſteſſo. Si ſcrivano per ordine uno ſotto l'altro i quoti X', X'', X'''..... in una colonna A; in una ſeconda colonna B, vicina alla prima, ſi ſcrivano i prodotti de' diviſori preſi a due a due; in una terza colonna C ſi ſcrivano i prodotti de' diviſori preſi a tre a tre......, B conterrà i diviſori ſemplici; C, D..... conterrà i diviſori compoſti. Talvolta con queſto metodo ſi troveranno anche i diviſori compleſſi; Ma il trovargli tutti eſattamente, e per ordine, non è opera di leggiere fatica, e di piccole rifleſſioni; queſto problema lo riſervo ad un trattato particolare.

CAPO

CAPO TERZO.

Uſo del Calcolo Algebraico nella ſoluzione delle equazioni.

Formazione delle equazioni.

59. SI chiama *Algebra*, o *Analiſi* l'arte di ſciogliere col calcolo algebraico, i problemi, che ſi propongono intorno a qualſivoglia ſpecie di quantità; e la prima operazione dell' Analiſta induſtre, è di denominare colle lettere dell' Alfabeto le quantità date, e le cercate, e di eſprimere con carattere algebraico le relazioni, che tra queſte paſſano, non altrimenti che i concetti della mente noſtra ſiamo uſi ad eſprimere con parole, proprie a quell' idioma, che a noi è comune, e familiare. Ciaſcuna condizione del problema dà un' equazione, e ſe tante ſono le condizioni, oſſia ſe tante in numero ſono le equazioni, quante ſono le quantità cercate, il problema ſi chiama *determinato*; ſe ſono meno, o più in numero l'equazioni che le quantità cercate, il problema ſi chiama *indeterminato o più che determinato*; per ciaſcuno di queſti caſi, ci ſono opportune regole, o per determinare eſattamente il valore delle quantità incognite contenute nelle equazioni, o per determinarlo proſſimamente al vero. Non è mia intenzione di ſtendere partitamente tutti i precetti dell' arte Analitica; Solamente eſporrò alcuni metodi più facili per trovare il valore dell' incognita, per cui ſia ordinata una data equazione, ſupponendo conoſciute tutte le altre quantità, che ne compongono i termini.

60. E in prima conviene ſapere quale ſia l'indole, e la natura delle radici d'una data equazione; volgiamoci per ciò al problema inverſo di cercare quale ſia la natura d' un' equazione, che ha per radici (o per valore dell' incognita) diverſe date quantità. Sia x l'incognita, e ſiano a, b, c, d.... i di-

versi valori di x; cosicchè sia $x = a$, $x = b$, $x = c$, ... ec. 1.º Si avrà $x - a = o$, $x - b = o$, $x - c = o$ ... ec.; questa è la fondamentale operazione dell' Analisi, chiamata *trasposizione*. Si conserva l'equazione tra i due membri (ciascuna delle quantità tra se eguali si chiama membro dell'equazione) d'una data equazione, se si tolga da un membro dell' equazione qualunque termine, e si metta nell' altro membro col segno contrario, scrivendo un zero al luogo del primo; ciò non è altro, che aggiungere, o sottrarre da amendue i membri d'un' equazione una stessa quantità; se $x = a$, sottraendo da amendue i membri la quantità a, si ha $x - a = a - a$, cioè $x - a = o$. 2.º Ciascuna di quelle equazioni $x - a = o$, $x - b = o$, ... si chiama equazione di primo grado; dacchè l'x non si trova in grado più elevato del primo; il prodotto di due di quelle equazioni $(x - a = o)$ $(x - b = o)$ si chiama equazione di secondo grado, dacchè, fatta la multiplicazione, l'x si trova alzata al secondo grado, cioè alla seconda potenza; ed in generale, il grado dell'equazione è sempre eguale all'esponente massimo dell'incognita. Si noti che aggiungere un'equazione ad un'altra, sottrarre un'equazione da un'altra, multiplicare, dividere un' equazione per un' altra .... significa aggiungere ciascun membro d'un' equazione al membro corrispondente dell' altra ... ec. 3.º Quindi ciascuna equazione si può concepire come composta di tante equazioni di primo grado, quante sono le unità nell' esponente del suo grado. Le equazioni però di grado più elevato si possono concepire formate dalla multiplicazione d'altre equazioni di grado inferiore, e più elevato del primo; quelle di quarto grado possono essere formate da due del secondo, quelle del sesto da tre del secondo, o da due del terzo... ec. 4.º Data una delle componenti, si può abbassare di grado la composta, dividendo questa per la sua componente, e se il grado della composta è m, ed il grado della componente è n, il grado della ridotta sarà $m - n$.

61. Fat-

61. Fatte le multiplicazioni accennate delle equazioni di primo grado, si ha grado

$$
\begin{array}{llllll}
\text{I.} \;\ldots\ldots & x & -a = 0 & & & \\
\text{II.} \;\ldots\ldots & x^2 & -ax & +ab = 0 & & \\
 & & -bx & & & \\
\text{III.} \ldots\ldots & x^3 & -ax^2 & +abx & -abc = 0 & \\
 & & -bx^2 & +acx & & \\
 & & -cx^2 & +bcx & & \\
\text{IV.} \ldots\ldots & x^4 & -ax^3 & +abx^2 & -abcx & +abcd = 0 \\
 & & -bx^3 & +acx^2 & -abdx & \\
 & & -cx^3 & +bcx^2 & -acdx & \\
 & & -dx^3 & +adx^2 & -bcdx & \\
 & & & +bdx^2 & & \\
 & & & +cdx^2 & & \\
\text{V.} \;\ldots\ldots & \text{ec.} & & & &
\end{array}
$$

Numero, e qualità delle radici reali.

62. DAll' attenta considerazione di queste, e d'altre simili formole fatte colle radici negative, o miste, si vede manifestamente. 1.° Che qualunque equazione ha tante radici nè più nè meno, quante sono le unità dell'esponente del suo grado. 2.° Che il coeficiente del secondo termine, o a dire meglio, della incognita che lo distingue, contiene la somma di tutte le radici; il coeficiente del terzo termine contiene tutti i prodotti delle radici prese a due a due; il coeficiente del terzo termine contiene tutti i prodotti delle radici a tre a tre......, e l'ultimo termine contiene il prodotto di tutte le radici prese insieme. 3.° Ne' termini pari, le radici stanno multiplicate in numero impari; ne' termini impari, stanno multiplicate in numero pari. 4.° Se tutte le radici sono negative, i termini dell' equazione sono tutti positivi; se tutte le radici sono positive, i ter-

termini dell' equazione sono alternativamente positivi, e negativi; se sono miste di radici positive, e negative, non è mai continuata l'alternazione de' segni, e talvolta manca qualche termine; di più tante sono le radici positive, quante sono le alternazioni de' segni $+-$; e tante sono le radici negative, quante sono le *consecuzioni* dello stesso segno ne' termini dell' equazione. 5.º Se la somma delle radici positive è eguale alla somma delle negative, manca il secondo termine dell' equazione, o si fa eguale a zero; se la somma delle radici positive supera la somma delle negative, il secondo termine dell' equazione è negativo; se la somma delle positive è minore delle negative, il secondo termine è positivo. 6.º Se il numero delle radici positive è pari, l'ultimo termine dell' equazione è positivo, se impari è negativo. 7.º Se si cambino i segni de' termini solamente pari, o solamente impari d'un' equazione tutte le radici si cambiano di positive in negative, e di negative in positive. 8.º Se invece d' x, e delle sue potenze si sostituisca in un' equazione il valore dell' incognita, la somma de' termini dell' equazione sarà eguale a zero. Queste proprietà delle radici si possono quasi tutte dimostrare *a priori* dalle regole de' segni $+-$; basti per noi l'induzione. Si noti, che le proposizioni inverse delle otto precedenti sono vere in ogni caso.

Numero, e qualità delle radici imaginarie.

63. DAl calcolo delle quantità imaginarie è manifesto, che il loro prodotto, solamente allora è reale, quando sono pari in numero le imaginarie quantità insieme multiplicate; si vede di più che per togliere da un polinomio $x-a-\sqrt{-b}$ il segno radicale, non v'è altro mezzo, che multiplicare il dato polinomio per un altro, che non differisca dal primo, che nel segno prefisso al termine imaginario, cioè per $x-a+\sqrt{-b}$.

64. For-

64. Formando su questi due principj l'equazioni composte da altre equazioni imaginarie di primo grado si vedrà:
1.° Che se v'hanno radici imaginarie in un'equazione, esse sono sempre pari in numero; 2.° Che sotto il segno radicale di ciascun binario di radici imaginarie vi sta sempre la medesima quantità, soltanto diversa nel +, o — che precede il segno $\sqrt{}$.
3.° Che qualunque equazione di grado impari, ha almeno una radice reale. 4.° Che nelle equazioni di grado pari, v'ha sempre una radice reale, quando l'ultimo termine, cioè il termine costante è negativo. 5.° Nelle equazioni di terzo e quarto grado, se manca il secondo termine, ed il terzo sia positivo, v'hanno sempre delle radici imaginarie.

65. Il problema più difficile intorno alle radici imaginarie delle equazioni, è di sapere il loro numero prima d'applicarvi i metodi per scioglierle. Newton ha esposto per ciò un metodo assai elegante nella sua Aritmetica universale; lo ha dimostrato il Sig. Giorgio Campbell, e nel dimostrarlo ci ha fatti avveduti che era difettoso in molti casi.
Espongo qui il metodo, che a quello del Newton v'ha sostituito del suo il citato Autore. Sia m il grado dell' equazione; dalla tavola delle potenze di $a+b$ si prendano i coeficienti A della potenza m, ommessi gli estremi; si sminuisca ciascun coeficiente di un unità, si avrà A'; si divida ciascun termine di A' per il doppio termine corrispondente di A; e le frazioni B, o B' quindi nate, si scrivano per ordine sopra i termini della data equazione, ommessi gli estremi. Sia n qualunque termine della data equazione; n' la frazione sovrapposta; a, b, c... ec. i termini, che vengono verso la destra del termine n; a', b', c', d' ... i termini che gli vengono verso la sinistra. Ciò posto: Se $n'n^2$ sarà maggiore di $a'a - b'b + c'c - d'd + e'e - f'f$.... ec. $= C$, si scriva il segno + sotto n; se $n'n^2$ sarà minore di C, si scriva il segno — sotto n; e sotto il primo e l'ultimo termine dell' equazione

zione ſi metta il ſegno $+$: Saranno tante le radici imaginarie nella data equazione, quante ſi troveranno alternazioni di $+$ in $-$ ne' ſegni ſottopoſti. Fin qui l'Autore; io non ho fatto altro che mettere il teorema ſotto forma più comoda, e più piana, introducendo le denominazioni di n, n'.... Applico il metodo ad un eſempio. Sia l'equazione $x^7 - 5x^6 + 15x^5 - 23x^4 + 18x^3 + 10x^2 - 28x + 24 = 0$ di grado ſettimo. Siano A i coeficienti della ſettima potenza di $a + b$, ommeſſi gli eſtremi; ſottraendo l'unità da ciaſcun termine di A, ſi avrà A'; dividendo ciaſcun termine di A' per il doppio de' termini corriſpondenti di A, ſi avrà B, cioè B'

$$A \ldots\ 7.\ 21.\ 35.\ 35.\ 21.\ 7.\quad B \ldots \frac{6}{14}.\ \frac{20}{42}.\ \frac{34}{70}.\ \frac{24}{70}.\ \frac{20}{42}.\ \frac{6}{14};$$

$$A' \ldots\ 6.\ 20.\ 34.\ 34.\ 20.\ 6.\quad B' \ldots \frac{3}{7}.\ \frac{10}{21}.\ \frac{17}{35}.\ \frac{17}{35}.\ \frac{10}{21}.\ \frac{3}{7};$$

Si diſpongono queſte frazioni ſopra i termini della data equazione, ommeſſi gli eſtremi, ſi avrà

$$\begin{array}{cccccccc} & \frac{3}{7} & \frac{10}{21} & \frac{17}{35} & \frac{17}{35} & \frac{10}{21} & \frac{3}{7} & \\ x^7 & -5x^6 & +15x^5 & -23x^4 & +18x^3 & +10x^2 & -28x & +24 = 0 \\ + & - & + & - & + & - & + & + \end{array}$$

per il termine $5x^6$ ſi ha $n'n^2 = \frac{75}{7}x^{12}$, e $C = 15x^{12}$

per il termine $15x^5$ ſi ha $n'n^2 = \frac{750}{7}x^{10}$, e $C = 97x^{10}$

per il termine $23x^4$ ſi ha $n'n^2 = \frac{8993}{35}x^8$, e $C = 292x^8$

per il termine $18x^3$ ſi ha $n'n^2 = \frac{5508}{35}x^6$, e $C = 70x^6$

per il termine $10x^2$ ſi ha $n'n^2 = \frac{1000}{21}x^4$, e $C = 48x^4$

per il termine $28x$ ſi ha $n'n^2 = \frac{336}{1}x^2$, e $C = 24x^2$

e mettendo ſotto ciaſcun termine dell' equazione i ſegni opportuni, ſi hanno ſei mutazioni, o variazioni de' Segni, cioè l'equa-

zione data contiene sei radici imaginarie. Colla regola del Newton non se ne troverebbero che due.

Trasformazioni delle equazioni.

66. L'Artificio più universale, e più spedito per trovare le radici d'una data equazione è di trasformare l'equazione data in un' altra più semplice, per passare quindi dalle radici della trasformata alle radici della proposta. L'uso del calcolo, e la pronta penetrazione dell' Analista suggerisce nelle particolari circostanze la più acconcia legge, con cui si deve trasformare la proposta equazione; qualunque però sia la legge della trasformazione. 1.° Si prenda ad arbitrio un' incognita y diversa dall' incognita x, per cui è ordinata l'equazione proposta; quest' y rappresenterà qualunque radice della trasformata. 2.° Si esprima con un'equazione tra x ed y la legge della cercata trasformazione. 3.° Si ricavi da questa equazione *ausiliare* il valore di x, da sostituirsi nella data equazione. Comunemente parlando, non fa bisogno per trovare l'x dell' equazione ausiliare, che delle più volgari operazioni del calcolo, e de' semplicissimi teoremi, che da queste si deducono; a cagione d'esempio, che un quoto multiplicato pel divisore è eguale al dividendo; che un prodotto diviso per uno de' suoi fattori è eguale al prodotto degli altri fattori .... ec.

67. Esempj di trasformazioni. 1.° Aumentare le radici x della proposta, d'una data quantità m; si ha $x+m=y$, cioè $x=y-m$ da sostituirsi nella proposta. 2.° Sminuire le radici x d'una data quantità m; sarà $x-m=y$, cioè $x=y+m$. 3.° Sottrarre ciascuna radice x dalla quantità m; sarà $m-x=y$, cioè $x=m-y$. 4.° Multiplicare le radici x colla quantità m; sarà $mx=y$, cioè $x=\frac{y}{m}$. 5.° Dividere le radici x per la quantità m;

sarà

sarà $\frac{x}{m} = y$, cioè $x = my$. 6.° Dividere una quantità m per ciascuna radice x; sarà $\frac{m}{x} = y$, cioè $x = \frac{m}{y}$.
Se le radici della trasformata voglliansi eguali

$$\text{a } \sqrt[m]{x}, \text{ sarà } x = y^m$$

$$\text{a } \sqrt[m]{fx}, \text{ sarà } x = \frac{y^m}{f}$$

$$\text{ad } \frac{f^m}{x}, \text{ sarà } x = \frac{f^m}{y}$$

$$\text{ad } \frac{xf^m}{g^n}, \text{ sarà } x = \frac{g^n y}{f^m}$$

.... ec.

E' evidente, che sostituendo le radici della trasformata in queste equazioni ausiliarie, si avranno le radici x della proposta; e facendo varj esempj di trasformazioni, si vedrà. 1.° Che per multiplicare le radici x con m, basta sostituire y invece d'x nella data equazione, e multiplicare il secondo termine della nuova equazione per m, il terzo per m^2, il quarto per m^3, l'n^{esimo} per m^{n-1}. 2.° Che per dividere le radici x per m, basta sostituire y invece d'x nella proposta, e dividere il secondo termine della nuova equazione per m, il terzo per m^2, il quarto per m^3, l'n^{esimo} per m^{n-1}. 3.° Che, se l'equazione proposta ha alcune radici imaginarie, qualunque trasformata conterrà le imaginarie medesime. 4.° Se la proposta ha delle radici positive e negative, e si aumentino le radici d'una quantità m, le radici positive si aumenteranno, e si sminuiranno le negative nella trasformata. 5.° Se la proposta ha delle radici positive e negative, e la quantità m, di cui si aumentino le radici della proposta sia eguale ad una delle radici negative, questa sarà eguale a zero nella trasformata; la trasformata innoltre avrà l'ultimo termine

eguale

eguale a zero, e si potrà abbassare d'un grado, dividendola per y. 6.° Nella stessa supposizione, se m sarà maggiore di qualunque delle radici negative della proposta, le radici negative della proposta così accresciute, saranno le positive della trasformata, e la minima radice positiva della trasformata nascerà dalla massima negativa della proposta. 7.° Se la proposta ha delle radici positive, e negative, e la quantità m, di cui si vogliano scemate le radici della proposta, sia eguale ad una, o maggiore di ciascuna radice positiva della proposta, o mancherà l'ultimo termine nella trasformata, o le positive della proposta sminuite di m saranno le radici negative della trasformata. E' facile il vedere le proposizioni inverse delle precedenti, la loro dimostrazione dalle regole de' segni, e dal num. 62., ed i corollari, che si possono dedurre da ciascuna.

Uso delle trasformazioni.

68. TRovare il valore della quantità m, che aggiunta alle radici della proposta, faccia svanire un dato termine nella trasformata.

Se il secondo termine della proposta ha $+$ si aumenti, e se ha $-$ si sminuisca ciascuna radice della proposta, della quantità m supposta nota; si faccia eguale a zero il coeficiente del termine della trasformata, che corrisponde al termine, che si vuol togliere; il valore di m dedotto da questa equazione sarà la quantità cercata. Sia la proposta $A \ldots . \; z^3 - 2sz^2 + vz - t^2 = 0$. Si supponga
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + s^2 z$$

$z - m = y$, cioè $z = y + m$; Sarà $z = y + m$

$$z^2 = y^2 + 2my + m^2$$
$$z^3 = y^3 + 3my^2 + 3m^2y + m^3$$

d'onde nella proposta sarà $z^3 = y^3 + 3my^2 + 3m^2y + m^3$

$$\begin{array}{rcl} -2sz^2 & = & -2sy^2-4msy-2sm^2 \\ +vz & = & +vy+mv \\ +s^2z & = & +s^2y+ms^2 \\ -t^2 & = & -t^2 \end{array}$$

cioè invece di A si avrà $B \ldots\ldots y^3+3my^2+3m^2y+m^3 = 0$

$$\begin{array}{r} -2sy^2-4msy-2m^2s \\ +vy+mv \\ +s^2y+ms^2 \\ -t^2 \end{array}$$

Se si voglia, che nella trasformata di A manchi il secondo termine, si supponga il coeficiente di y^2, in B, eguale a zero, cioè $3m-2s=0$, ed $m=\frac{2s}{3}$ sarà la quantità da sostituirsi in B per avere la cercata trasformata. Se si voglia, che nella trasformata di A manchi il terzo termine, si supponga il coeficiente di y in B eguale a zero; e se si voglia togliere il quarto termine, si supponga il coeficiente di y^0, cioè l'ultimo termine di B, eguale a zero. Si vede in generale, che per fare svanire nella trasformata il termine che corrisponde all'n esimo della proposta, conviene sciogliere un'equazione di grado $(n-1)$ esimo.

69. Trovare una quantità m, che aggiunta alle radici della proposta, faccia eguale ad a il coeficiente d'un dato termine n esimo della trasformata.

Si operi come nel problema precedente; ma il coeficiente del termine n esimo in B si dovrà supporre eguale ad a, e non a zero.

70. Mettere nella trasformata i termini, che mancano nella proposta.

Si aumentino, o si sminuiscano, come al num. 68. d'una qualunque quantità a le radici della proposta.

71. Mettere nella trasformata i termini, che mancano nella proposta, ed elevare la trasformata ad un grado qualunque più elevato del grado della proposta.

Si multiplichi la proposta per x tante volte, finchè la trasformata sia di grado cercato; si operi sull'equazione così ridotta come al num. 70.

72. Se il primo termine della propoſta ha un coeficiente a diverſo dall' unità, trasformarla in un' altra, il cui primo termine abbia l'unità per coeficiente.
Si multiplichino le radici della propoſta per a; oppure ſi divida ciaſcun termine della propoſta per a.

73. Se il primo termine della propoſta ha per coeficiente l'unità, ed i coeficienti d'uno, o più altri termini ſieno frazionari, trasformarla in un'altra, che non abbia frazioni per coeficienti degli altri termini, e mantenga l'unità per coeficiente del primo termine.
Si multiplichino le radici della propoſta per il prodotto de' denominatori di tutti i termini.

74. Trasformare la propoſta in un' altra, in modo, che la radice maſſima della propoſta ſia la minima della trasformata, e la minima della propoſta ſia la maſſima della trasformata.
Si ſupponga $x = \frac{1}{y}$, e fatte come ſopra le ſoſtituzioni, ſi multiplichi ciaſcun termine della trasformata per il prodotto de' denominatori della medeſima.

75. Se le radici della propoſta ſiano parte poſitive, parte negative, trasformarla in un'altra, le di cui radici ſiano tutte poſitive.
Si muti il ſegno al maſſimo coeficiente negativo della propoſta; da queſto, aumentato d' un' unità, ſi ſottraggano le radici della propoſta. Sia $x^2 - 2x - 3 = 0$; il maſſimo coeficiente negativo è -3; mutando il ſegno a queſto coeficiente ſi ha 3; ſi faccia $3 + 1 - x = y$, cioè $4 - x = y$, oſſia $4 - y = x$; d'onde $x^2 = 16 - 8y + y^2$, e la propoſta ſi cambierà in
$y^2 - 8y + 16 = 0$, cioè in $y^2 - 6y + 5 = 0$, che per l'alternazione
$+ 2y - 8$
$- 3$
de' ſegni, ha tutte le ſue radici poſitive.

76. Togliere gli incommenſurabili coeficienti $\sqrt{n}$, che per avventura ſi trovino ne' termini pari della propoſta.
Si multiplichino le radici della propoſta per $\sqrt{n}$. 77. Se

77. Se si trovi nel coeficiente del secondo termine della proposta $\sqrt[3]{n^2}$, nel coeficiente del terzo termine $\sqrt[3]{n}$, nessun incommensurabile al quarto termine, $\sqrt[3]{n^4}$ al quinto, $\sqrt[3]{n}$ al sesto, nessuno al settimo, e così successivamente, basta supporre $x = \frac{y}{\sqrt[3]{n}}$, e svaniranno i radicali di terzo grado da qualunque data equazione. Se non vi fosse quest' ordine ne' radicali coeficienti d'un' equazione, è manifesto che colla presente trasformazione, che è la quarta del num. 67. non svanirebbero i radicali. Lo stesso metodo può servire in casi simili per le $\sqrt[4]{n}$, e per le $\sqrt[m]{n}$.

78. E' troppo importante il sapere togliere i coeficienti radicali da una proposta equazione per non dovere qui ommettere un metodo generale per le radicali d'ogni grado, comunque disposte ne' termini dell' equazione medesima. 1.° Si lasci sola in un membro dell' equazione la quantità radicale, che si vuol togliere dall'equazione; ciò si fa col trasporre nell' altro membro tutte le altre quantità: Si alzi ciascun membro dell' equazione alla potenza d'esponente eguale all' esponente del radicale medesimo. 2.° Se dopo questa operazione si trovi nel secondo membro qualch' altra quantità radicale, si operi su quella come sulla prima, e così nel resto. Si abbrevierà il calcolo (come al num. 46.) col sostituire prima di tutto, o dopo ciascuna operazione una nuova lettera invece delle quantità già divenute commensurabili, riservandosi a rimettere nell' equazione il valore, o i valori di queste lettere introdotte, dopo finite tutte le operazioni sulle quantità radicali.

Sia

Sia $x + \sqrt[3]{a^2 x} = \sqrt{ax}$; ſi faccia $n = \sqrt[3]{a^2 x}$

$m = \sqrt{ax}$

ed invece dell'equazione data ſi avrà $x + n = m$; d'onde $n = m - x$, ed elevando alla terza potenza ciaſcun membro ſi avrà $n^3 = m^3 - 3m^2 x + 3mx^2 - x^3$, oſſia $n^3 + 3m^2 x + x^3 = m^3 + 3mx^2$; in queſt'ultima equazione ſi ſuppongano le quantità commenſurabili $n^3 + 3m^2 x + x^3$ eguali ad f^3, e ſi alzi, a cagione dell'$m = \sqrt{ax}$, ciaſcun membro dell'equazione $m^3 + 3mx^2 = f^3$ alla ſeconda potenza; ſi avrà $m^6 + 6m^4 x^2 + 9m^2 x^4 = f^6$, che non conterrà più incommenſurabile alcuna, dopo la ſoſtituzione de' valori di f, m, n.

79. Queſti ed altri ſimili ſono gli uſi delle traſformazioni delle equazioni, tutti neceſſarj per diſporre l'equazione, che ſi ha da un problema a farci conoſcere i valori dell' incognita, per cui è ordinata. La più uſuale tralle addotte traſformazioni è quella del num. 68. applicata a togliere il ſecondo termine d'una data equazione; la traſformazione del num. 78. ſerve per conoſcere il grado vero d'una data equazione.

Analiſi delle equazioni di primo grado.

80. DAlle coſe fin qui dette è manifeſto, che per non turbare l'eguaglianza che paſſa trai due membri d'un' equazione ſi devono fare in un membro le operazioni ſteſſe, che ſi fanno nell' altro; come ſarebbe aggiungere ad amendue i membri, o ſottrarre da' medeſimi una ſteſſa quantità, o quantità eguali; multiplicare, o dividere ciaſcun membro per una ſteſſa quantità, o per quantità eguali; formare la ſteſſa potenza, o eſtrarre la ſteſſa radice da un membro, che ſi forma, o ſi eſtrae dall' altro; finalmente ſoſtituire in un' equa-

equazione invece d'un termine, o d'una lettera un altro termine, od un' altra lettera eguale alle prime. Finchè si opererà sull' equazione in questo modo, saranno sempre legittime le conseguenze che se ne dedurranno; or questi, e non altri sono gli artificj dell' Analisi; Incominciamo dalle equazioni di primo grado.

81. Se l'equazione non contiene più d'una incognita x; si traspongano in un solo membro dell' equazione tutti i termini che contengono l'x, lasciando gli altri nell' altro membro; si facciano su amendue i membri dell' equazione le operazioni a quelle contrarie, per cui resta l'x inviluppato con altre quantità; cioè se è diviso per a; si multiplichi tutta l'equazione per a; se è multiplicato per a, si divida per a tutta l'equazione ... ec.; finoattantochè resti l'x da se solo in un membro, e le quantità cognite nell' altro membro dell' equazione. Si cerchi il valore di

$ax + bc = \frac{dx}{c} + ca$; si avrà, trasponendo $\frac{dx}{c}$, e bc,

$ax - \frac{dx}{c} = ca - bc$; multiplicando tutto per c, si ha cax

$- dx = c^2 a - bc^2$; ossia

$(ca - d)x = c^2 a - bc^2$, e dividendo per $ca - d$ si ha finalmente $x = \frac{c^2 \cdot a - bc^2}{ca - d}$.

Con queste, ed altre simili operazioni si *libera* l'incognita d'un' equazione data; cioè si esprime con quantità conosciute l'incognita della data equazione.

82. Se l'equazione contiene più d'un' incognita, per avere determinatamente il valore di ciascuna incognita, si suppongono date tante equazioni, quante sono le incognite, ed a queste si applicano le sovra esposte riduzioni per le equazioni ad una sola incognita co' tre seguenti metodi.

Primo metodo. Siano, a cagione d'esempio, due le equazioni del

del problema a due incognite ; $ax + by = a^2$; $\frac{ay}{c} = b - \frac{fx}{a}$;
1.° Si maneggi una di queste equazioni, come non contenesse più d'una incognita ; dalla prima equazione, si avrà $x = \frac{a^2 - by}{a}$;
2.° Si sostituisca questo valore di x nella seconda equazione ; si avrà $\frac{ay}{c} = b - \frac{fa^2 - fby}{a^2}$; 3.° Sostituendo il valore di y, preso in questa equazione, nel valore di x trovato prima, si ha $x = a - \frac{b^2ca - bcfa}{a^3 - bcf} = \frac{a^4 - ab^2}{a^3 - bcf}$ c.

Secondo metodo. Quando in ciascuna delle date equazioni si trovano le stesse incognite ; si prenda in ciascuna il valore d'una stessa incognita ; si faccia eguale il valore primo dell'incognita al secondo, il secondo al terzo . . . ec. ; si avrà un' equazione, ed una incognita meno delle prime ; su queste si operi allo stesso modo, e si ripeta la stessa operazione, fino ad avere una sola equazione, con una sola incognita ; il valore di questa, sostituito nella penultima ; darà il valore d'un' altra incognita ; il valore di queste due, sostituito nelle altre, ci darà... ec. Nel proposto esempio. 1.° Si ha dalla prima equazione $x = \frac{a^2 - by}{a}$, e dalla seconda equazione si ha $x = \frac{abc - a^2y}{cf}$; 2.° Facendo un' equazione di questi due valori d'x si ha $\frac{a^2 - by}{a} = \frac{abc - a^2y}{cf}$; donde cavando il valore di y, e sostituendolo in uno de' valori di x, si avrà x.

Terzo metodo. Se le due equazioni a due incognite sieno tali, che i termini, che contengono la stessa incognita, presi senza segni, sieno identici, ed i termini, che contengono un' incognita abbiano lo stesso segno, mentre quegli, che contengono l'altra incognita hanno segni contrarj in amendue equazioni ; la somma delle date equazioni darà il valore d'un' incognita, e la differenza

delle

delle medesime darà il valore dell' altra. Se nelle date equazioni vi sia bensì la detta contrarietà de' segni, ma l'identità manchi de' termini, si ridurranno essi all' identità uno per uno, multiplicando ciascuna equazione per il coefficiente dell' incognita dell' altra equazione. Se i termini della stessa incognita abbiano in amendue le equazioni gli stessi segni, o segni contrarj, si riducano, se fa bisogno, questi termini medesimi all' identità, ed in vece della somma, e sottrazione, si faccia una doppia sottrazione nel caso de' segni stessi, ed una doppia addizione nel caso de' segni contrarj. Questo metodo si stende, come gli altri due, a tre, a quattro.... equazioni formate da tre, da quattro.... incognite. Esempj. 1.º caso. $ax+by=c^2$, $ax-by=n^2$; fatta la somma di queste, si ha $2ax=c^2+n^2$ cioè $x=\frac{c^2+n^2}{2a}$; e sottraendo una dall' altra, si ha $2by=c^2-n^2$, cioè $y=\frac{c^2-n^2}{2b}$
2.º caso. $ax+by=c^2$, $nx-my=n^2$; multiplicando la prima equazione per m, e la seconda per b si ha $amx+bmy=mc^2$ $bnx-bmy=bn^2$; la somma di queste equazioni darà il valore di x; e multiplicando la prima delle date equazioni per n, e la seconda per a, la differenza delle equazioni, che ne risulteranno, darà il valore di y; cioè per avere il valore d'un' incognita, si rendon identici i termini, che contengon l'altra.
3.º caso. $ax+by=c^2$, $nx+my=n^2$; rendendo identico l'x, la differenza delle due equazioni darà l'y; e rendendo identico l'y, la differenza delle equazioni darà l'x; e se fossero date $-ax+by=c^2$, $+nx-my=n^2$; si faccia la somma delle equazioni, resi che siano identici i termini dell'x, o y, e si avrà y, o x.

83. Se il numero delle incognite fosse maggiore del numero delle equazioni, non si potrà determinare il loro valore, senza assumere ad arbitrio il valore di alcune incognite. Dato $3x+2y=4$, si avrà $x=\frac{4-2y}{3}$, e questo valore di x dipenderà dal valore arbitrario, che si dia ad y; cioè x avrà infiniti valori.

Analisi delle equazioni di grado più elevato del primo.

84. NOi qui consideriamo solamente il caso, in cui nella equazione data non c'entri più d'un' incognita; negli altri casi, si dovranno maneggiare i metodi, che esporremo, conformemente a ciò, che s'è detto per le equazioni a più incognite di grado primo. Ma conviene prima di tutto distinguere l'equazoni che hanno tutte, o qualcuna delle sue radici commensurabili, e razionali, da quelle che le hanno immaginarie, o reali incommensurabili. Qualunque poi sia l'equazione, e qualunque il genere delle sue radici, dovrà sempre essere ridotta colle trasformazioni spiegate sopra, a non avere nè frazioni, nè radicali, nè altro coeficiente fuor dell' unità al primo, o più elevato suo termine.

85. Per le equazioni, che hanno qualche radice commensurabile. Si separi la data equazione in due somme qualunque, A, B; per esempio in una si mettano tutte le quantità, che contengono una lettera conosciuta, e nall' altra si scrivano tutte le altre quantità. Ordinando queste due somme per x, si cerchi il massimo comune divisore delle medesime; se egli è un' equazione lineare, o di primo grado, ci darà un valore dell' incognita x; altrimenti, dividendo la data equazione per questo massimo comune divisore, si avrà per quoto, o un' equazione lineare, che contiene un valore d'x, o un' equazione composta, che, multiplicata col trovato comune divisore massimo, restituirebbe la data equazione; ciascuna di queste equazioni particolari si maneggi come la data, e le loro radici commensurabili saranno le radici della data.

86. Espongo il metodo per trovare il massimo comune divisore delle due somme A, B.

Si divida la maggiore quantità A per la minore B; se la divisione si fa senza residuo, è evidente che B sarà il massimo di-

visore cercato. 2.° Se v'ha qualche residuo C, non si badi al quoto della prima divisione, e si divida B per C; se la divisione si fa senza residuo, sarà C il massimo divisore cercato. 3.° Si continui per simil modo l'operazione, non curando i quoti delle divisioni, ed il residuo D, che dividerà esattamente l'ultimo divisore, sarà il divisore cercato.

Dimostrazione. 1.° Se d è divisore di a, sarà d divisore di ma; Se d è divisore di $a = b + c$, e di una delle parti b, sarà d divisore dell' altra parte c; questi sono assiomi.

2.° Sia $\frac{A}{B} = m + \frac{C}{B}$ . . . . . sarà $A = mB + C$

$\frac{B}{C} = n + \frac{D}{C}$ . . . . . sarà $B = nC + D$

$\frac{C}{D} = p$ . . . . sarà $C = pD$

3.° D è divisore di C; dunque D è divisore di nC, e per essere D divisore di se stesso, sarà D divisore di $nC + D = B$; e per la stessa ragione sarà D divisore di A; dunque D è divisore comune di A, B. Innoltre; il massimo divisore di A, B, deve essere divisore di $mB + C$, cioè di C, e di nC, ossia di D; dunque il massimo divisore di A, B non può essere diverso da D, altrimenti sarebbe minore di un divisore D, cioè non sarebbe il massimo.

87. 1.° Si potrebbe collo stesso metodo trovare il massimo comune divisore di più quantità A, B, C; Si cerchi il massimo divisore q di A, B, ed il massimo comune divisore r di q, C, sarà r il massimo comune divisore di A, B, C; ma per ora noi non abbiamo bisogno di tanto. 2.° Il metodo di trovare il massimo divisore r di due quantità, serve ancora per ridurre una frazione a minimi termini, dividendo ciascun termine per r.

88. Se le date quantità A, B sieno quantità complesse, come lo sono veramente nel caso del num. 85., è necessario ordinarle

narle

narle per rapporto ad una lettera; quindi 1.° Se nelle quantità A, B così ordinate si scopra ad occhio una quantità a, o numerica, od algebraica comune a tutti i termini d'amendue le quantità date, quella quantità comune sarà un divisore da notarsi in disparte, ed il comune massimo divisore de' quozienti delle date quantità divise per a, si dovrà multiplicare per quel primo divisore.

2.° Se prima di fare la divisione di A, B, si scopra che tutti i termini del divisore B siano multiplicati per una stessa quantità a; che non sia divisore di A, si prenda per divisore $\frac{B}{a}$, trascurando a: Sia detto lo stesso del dividendo A.

3.° Se l'esponente massimo della lettera, che distingue i termini sia minore in una quantità, che nell' altra, quella prima quantità si dovrà prendere per divisore, e l'altra per dividendo; Se l'esponente massimo della lettera, che distingue i termini sia eguale in A, ed in B, si può prendere qualunque delle due date quantità per dividendo.

4.° Se nel fare taluna delle prescritte divisioni, si trovi per quoto una frazione; Si riduca la frazione a minimi termini, e pel denominatore della ridotta si multiplichi il dividendo, e si rincominci da capo l'operazione.

89. Applico il metodo del num. 85. ad un esempio. Si cerchino le radici commensurabili di

$$\begin{aligned} x^3 &- 2ax^2 - 3a^2x - 3a^2b = 0. \\ &- cx^2 + 3acx + 3abc \\ &+ bx^2 - 2abx \\ &\qquad\quad - bcx \end{aligned}$$

Si separi l'equazione in due somme; cioè in una si mettano, a cagione d'esempio, le quantità che contengono la lettera c, e nell' altra le altre; si avrà

$$A \ldots x^3 - 2ax^2 - 3a^2x - 3a^2b; \text{ ed } - cx^2 + 3acx + 3abc$$
$$+ bx^2 - 2abx \qquad\qquad - bcx$$

Nella

Nella seconda somma c'entra in tutti i termini la lettera c, e dividendola per $-c$, si ha $B \ldots \ldots x^2 - 3ax - 3ab$
$$+ bx$$
Dividendo A per B, non si ha alcun residuo, cioè B è divisore di A, e di se stesso, cioè della proposta; ma per essere B un' equazione composta, si dovrà dividere la proposta per B, ed avendosi per quoto $x + a - c$, sarà $x = c - a$ una delle radici cercate, e maneggiando B come se fosse la proposta, si avranno le altre due radici della proposta, cioè $x = 3a$; $x = -b$.

90. Il metodo precedente si applica soltanto alle equazioni letterali. Per le equazioni, o letterali, o numeriche, si rifletta, che l'ultimo termine di qualunque equazione è eguale al prodotto di tutte le radici; quindi è, che qualcuno de' divisori dell' ultimo termine della data equazione, sostituito invece dell' incognita x, col segno $+$, o col segno $-$ renderà la somma de' termini eguale a zero; Si cerchino adunque tutti i divisori dell' ultimo termine d'un' equazione; si sostituisca ciascuno di questi divisori, col segno $+$, e col segno $-$ invece dell' x; tutti quegli, che saranno eguale a zero la somma de' termini dell' equazione, presi col segno contrario, saranno radici della medesima. Nell' equazione superiore, cercando tutti i divisori di $3abc - 3a^2b$, se ne troveranno tre, cioè b, $-3a$, $a-c$, che rendono l'equazione eguale a zero, se si sostituiscano invece dell' x; Sarà dunque $x = -b$
$$x = 3a$$
$$x = c - a$$
La difficoltà di trovare tutti i divisori complessi dell' ultimo termine d'un' equazione letterale, fa preferire le più volte il metodo del numero precedente per trovare le radici d'una letterale equazione; ed il presente si riserva per le equazioni numeriche.

91. Se non si trovi verun comune divisore massimo delle due somme (num. 89.), o se nessuno de' divisori dell' ultimo termine

mine

mine d'un' equazione, sostituito invece d'x, faccia eguale a zero (num. 90.) la somma de' termini d'un' equazione, egli è certo, che le radici della proposta equazione non sono commensurabili; ma sibbene, o reali incommensurabili, o immaginarie, o miste d'incommensurabili, e d'immaginarie. Dalle cose dette sulle radici immaginarie (num. 64.), è evidente, che nelle equazioni di secondo grado possono essere tutte le radici immaginarie; nelle equazioni di terzo grado possono essere al più due immaginarie, in quelle di quarto grado, o due, o tutte; in quelle di quinto, o due, o quattro... ec.; quindi nelle equazioni di grado impari almeno una delle radici è reale. Se l'equazione di terzo grado a tre radici reali, ed incommensurabili, con nessun artificio analitico si potranno trovare i loro valori, e questo caso si chiama caso *irredutibile*; Se l'equazione di quarto grado ha tre radici reali incommensurabili, la quarta sarà reale, e commensurabile da trovarsi coi metodi de' numeri precedenti. In generale poi trovato un valore a d'un' equazione ordinata per x; dividendo la data equazione per $x-a=0$, si abbasserà d'un grado l'equazione medesima.

92. Si noti di più, che il vero grado delle equazioni non sempre è indicato dall' esponente massimo dell' incognita, per cui è ordinata. Le equazioni di secondo grado possono essere composte da due del primo; quelle di terzo possono essere composte da una del secondo, e da una del primo, oppure da tre del primo; quelle di quarto grado possono essere composte da quattro del primo, o da due del secondo, o da una del terzo, e da una del primo, e così nelle altre. Riservo (come al n. 58.) ad un' altra operetta la ricerca delle equazioni composte, che multiplicate insieme formano l'equazione data; cioè la ricerca de' fattori complessi d'una data quantità. Supponendo ora, che le componenti siano della forma $x-a=0$, se a è una quantità commensurabile, si troverà coi metodi già esposti, se a è una quantità

tità incommenſurabile, ſi potrà trovare con quegli che eſporrò qui ſotto.

93. Finalmente ſi noti, che con facili ſoſtituzioni ſi riducono molte equazioni di grado ſuperiore alla forma delle equazioni di grado più depreſſo.

L'equazione $A \ldots a^4 - \frac{2q}{b} a^2 + p^2 = 0$, che ſembra di quarto
$$\begin{array}{l} \phantom{a^4 - \frac{2q}{b}a^2} - p b^2 \\ \phantom{a^4 - \frac{2q}{b}a^2} + \frac{1}{4} b^4 \end{array}$$
grado per l'a^4, ſi riduce ad una del ſecondo, facendo $a^2 = t$; cioè ſi riduce a $t^2 - \frac{2q}{b} t + p^2 = 0$; l'equazione A ſi chia-
$$\begin{array}{l} \phantom{t^2 - \frac{2q}{b}t} - p b^2 \\ \phantom{t^2 - \frac{2q}{b}t} + \frac{1}{4} b^4 \end{array}$$
ma *derivativa* del ſecondo grado. Così $B \ldots b^6 - 2 s b^4 + s^2 b^2 - t^2$
$$ + v b^2$$
$= 0$, che ſembra, per il b^6, di ſeſto grado, ſi riduce ad una del terzo, facendo $b^2 = z$, cioè ſi riduce a $z^3 - 2 s z^2 + s^2 b^2 - t^2$
$$ + v b^2$$
$= 0$; l'equazione B, ſi chiama *derivativa* del terzo grado... ec. E' evidente, che ſoſtituendo le radici delle equazioni derivate t, z nelle ſuppoſte $a^2 = t$, $b^2 = z$, ſi avranno con una ſemplice eſtrazione di radici, i valori di a, b delle derivative.

94. Trovare il valore d'x delle equazioni di ſecondo grado $x^2 - px - q = 0$.

Si ſupponga $x = y + \frac{1}{2} p$, affine di togliere il ſecondo termine della data equazione, ſi avrà $y^2 - \frac{1}{4} p^2 = 0$; cioè $y^2 = \frac{1}{4} p^2$
$$\phantom{y^2 - \frac{1}{4}} - q$$
$+ q$, ed eſtraendo da amendue i membri di queſta equazione la ra-

radice seconda, si ha $y = \pm \sqrt{q + \frac{1}{4} p^2}$; ed essendo $x = y + \frac{1}{2} p$, sarà $x = \frac{1}{2} p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4} p^2}$

La preparazione di togliere il secondo termine della proposta equazione, si supporrà già fatta nel problema seguente, che comprende le equazioni d'ogni grado più elevato del secondo.

95. Trovare il valore d'x dell' equazione

$$A \ldots x^m - B x^{m-1} - C x^{m-2} - D x^{m-3} \ldots - Q = o.$$

1.° Si rappresenti la radice cercata x con tante lettere $a, b, c \ldots$ ec. quante sono unità nell'esponente m del grado dell'equazione A, una meno; cioè per le equazioni di terzo grado, si supponga

$$x = a + b$$

per quelle di quarto... $x = a + b + c$

per quelle di quinto... $x = a + b + c + d$

.... ec.

2.° Si alzi ciascun membro di quest'equazione ipotetica alla potenza di grado m.

3.° Si separino dal secondo membro di quest' ultima equazione le quantità, che corrispondono ad x^{m-2}, x^{m-3}.... ec.

4.° Si introducano nello stesso secondo membro gli x^{m-2}, x^{m-3} .... invece de' loro valori espressi in a, b...., e trasponendo si faccia tutta l'equazione eguale a zero; si avrà A'.

5.° Si suppongano i coeficienti de' termini di A', eguali ai coeficienti de' termini corrispondenti di A, e combinando insieme le equazioni, che ne risulteranno, si ricavino i valori di a, b, c..., ec.

96. Prima di fare l'applicazione del metodo, è necessario dimostrare un teorema, che ha frequentissimo uso in tutta l'analisi, e su cui si appoggia tutta la risoluzione delle equazioni, che ora spieghiamo; egli è il seguente.

Se $ax + bx^2 + cx^3 \ldots$ ec. $= ex + fx^2 + gx^3 \ldots$ ec. farà $a = e$
$b = f$
$c = g$
... ec.

Il Sig. Sketch nel suo opuscolo inglese sulle *flussioni*, lo dimostra pel caso, che x sia una piccolissima frazione, o, come dicono più propriamente, una quantità infinitamente piccola. Si divida, dice, ciascun membro dell'equazione per x; si avrà $a + bx + cx^2 \ldots$ ec. $= e + fx + gx^2 \ldots$ ec., e per essere infinitamente piccola l'x, non si turberà l'equazione, sprezzando bx, cx^2, ... fx, gx^2 ...., farà dunque $a = e$. Levando ora dalla equazione già ridotta per mezzo della divisione, le quantità eguali a, e, farà $bx + cx^2 + \ldots$ ec. $= fx + gx^2 + \ldots$ ec. sulla quale si potrà ripetere all'infinito la stessa dimostrazione.

Quando l'x non sia una quantità infinitamente piccola, ciocchè sempre si suppone nell'Analisi finita, è evidente, che riducendo l'equazione alla forma $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots$ ec. $= 0$, il coeficiente a conterrà la somma delle radici, b il prodotto delle radici prese due a due .... ec.; dunque se questa equazione si suppone identica con $x^m + ex^{m-1} + fx^{m-2} \ldots$ ec. $= 0$, il coeficiente e conterrà la somma delle radici della prima equazione, f il prodotto delle medesime, prese a due a due ... ec.; cioè farà
$a = e$;
$b = f$
... ec. Quindi a ragione suppongono gli Analisti eguali i termini, o i coeficienti de' termini corrispondenti di due date equazioni identiche: Intendono essi che ciò si faccia, quando dicono di *paragonare i termini* di due date equazioni supposte eguali.

97. Applicazione del metodo: Sia la proposta di grado terzo $Z \ldots\ldots x^3 - px - q = 0$, è la radice cercata $x = a + b$; farà

$$x^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Quale è in questo secondo membro la quantità, che è multiplicata

cata per $x=a+b$? Fatta un po di riflessione, si vede subito, che $3a^2b+3ab^2$ è eguale a $3ab$ multiplicato per $a+b$, cioè per x; invece dunque di $3a^2b+3ab^2$ si potrà scrivere $3abx$, e si avrà

$$A' \ldots\ x^3-3abx-a^3 = 0$$
$$+b^3$$

che è un' equazione identica all' A. Quindi $\left.\begin{array}{l} 3ab=p \\ a^3+b^3=q \end{array}\right\} = B$

Dalla prima di queste equazioni si ha . . . . . $ab=\frac{1}{3}p$

$$a^3b^3=\frac{1}{27}p^3$$

e dalla seconda si ha . . . . $(a^3+b^3)\,a^3=a^3q$

cioè $a^6+a^3b^3=a^3q$,

e fatta la sostituzione del valore di a^3b^3 dedotto dalla prima equazione si ha $a^6-qa^3=-\frac{1}{27}p^3$

che è un' equazione derivativa di secondo grado; d' onde

$$a^3=\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}$$

$$a=\sqrt[3]{\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}$$

Resta a determinarsi il b; ma sostituendo il valore di a, e di a^3 nelle equazioni B, si ha

dalla prima

$$b=\frac{p}{3a}=\frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}q\pm\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}}$$

e dalla

e dalla seconda

$$b = \sqrt[3]{q - a^3} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$$

donde

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$$

$$+ \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}}$$

oppure

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$$

98. Sia la propoſta $A \ldots\ldots x^4 - px^2 - qx - r = 0$, e la radice cercata $x = a + b + c$; ſarà

$$\begin{aligned} x^4 = a^4 + 46a^3 &+ 6b^2a^2 + 4b^3a + b^4 = 0 \\ + 4ca^3 &+ 12b^c a^2 + 12b^2ca + 4b^3c \\ &+ 6c^2a^2 + 12bc^2a + 6b^2c^2 \\ &\quad + 4c^3a + 8bc^3 \\ &\quad\quad + c^4 \end{aligned}$$

Qual' è

Qual'è in questo secondo membro la quantità, che è multiplicata per $x^2 = (a+b+c)^2$, e quale è quella, che è multiplicata per $x = a+b+c$? Si disponga il secondo membro nel modo seguente

$$\left.\begin{array}{l} 4ca^3 + 2ba^2 + 4b^3a + 2b^4 \\ \quad + 8bca^2 + 8b^2ca + 4b^3c \\ \quad + 8c^2a^2 + 4bc^2a + 2b^2c^2 \\ \qquad\qquad + 4c^3a \end{array}\right\} = B$$

$$\left.\begin{array}{l} 4ba^3 + 4b^2a^2 + 4bc^2a + 4b^2c^2 \\ \quad + 4bca^2 \qquad\qquad\quad + 4bc^3 \end{array}\right\} = C$$

$$\left.\begin{array}{l} a^4 + * - 2c^2a^2 + 4b^2ca + c^4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - b^4 \end{array}\right\} = D$$

Facendo la divisione di B per x^2, ossia per $(a+b+c)^2$, si troverà

$$B = (2b^2 + 4ac)(a+b+c)^2 = (2b^2 + 4ac)x^2,$$

e facendo la divisione di C per x, ossia per $a+b+c$, si troverà

$$C = (4ba^2 + 4bc^2)(a+b+c) = (4ba^2 + 4bc^2)\,x$$

restando D non divisibile per x, cioè senza x per fattore. Quindi l'equazione ipotetica si cambierà in questa

$$\begin{array}{l} A'\ldots\ldots x^4 - 2b^2x^2 - 4ba^2x - a^4 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad - 4acx^2 - 4bc^2x + 2c^2a^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 4b^2ca \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - c^4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + b^4 \end{array}$$

Para-

Paragonando A' con A, si ha 1.° $b^6 - \frac{1}{2} p b^4 + \frac{1}{4} r b^2 - \frac{1}{64} q^2 = 0$

$$+ \frac{1}{16} p^2 b^2$$

2.° $a^4 - \frac{q}{4b} a^2 + \frac{1}{16} p^2 = 0$

$$- \frac{1}{4} p b^2$$

$$+ \frac{1}{4} b^4$$

3.° $c = \frac{p - 2b^2}{2a}$

La prima equazione è derivativa del terzo grado, e darà b; la seconda è derivativa del secondo grado, e darà a; la terza è di primo grado, ed esprime il valore di c.

Per applicare queste equazioni più comodamente alle formole de' num. precedenti, si introducano alcune denominazioni ausiliarie ad arbitrio, da rimettersi al primo valore dopo finiti i calcoli necessarj per iscioglierle; così nella prima equazione fatto $p = 4s$, $q = 8t$, $r = 4v$, si avrà

$$b^6 - 2 s b^4 + s^2 b^2 - t^2 = 0$$
$$+ v b^2$$

99. E' evidente, che il metodo è universale per ogni grado; per avere le radici d'un' equazione di quinto grado, si dovrà sciogliere un' equazione di quarto grado, una del terzo, una del secondo, ed una del primo, ed in generale, per avere le radici d'un' equazione di grado m, si dovranno sciogliere tutte le equazioni di grado inferiore fino inclusivamente il primo. Vero è, che per la lunghezza de' calcoli che devono farsi in questo metodo, si ha ricorso ad altri metodi più semplici, presi dalle equazioni indeterminate; noi gli spiegheremo altrove; intanto

tanto credo, che sarà piacere ai lettori il vedere come *con una sola trasformazione del primo termine di qualunque data equazione*, si hanno le sue radici. Il Varignon (Acad. Royal. 1699.) ha trovate per questa strada le radici delle equazioni di secondo e terzo grado solamente, senza accennare che si poteva stendere a tutte l'altre equazioni.

100. Per l'equazione $x^3 \pm px \pm q = 0$; 1.° Se $\frac{1}{27}p^3 = \frac{1}{4}q^2$, le due radici positive, o negative (la somma delle quali è eguale alla terza), sono sempre eguali tra se: Se il p sia negativo, ed $\frac{1}{27}p^3 < \frac{1}{4}q^2$, due radici dell' equazione sono immaginarie: Se $\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2$, le tre radici sono tutte reali, ed ineguali.

2.° Nel primo caso, ciascuna delle radici eguali sarà sempre $\frac{\pm 3q}{\mp 2p}$: Nel secondo caso (che, per le cose dette, vale anche quando il solo p sia positivo), si chiami r^2 un quadrato maggiore di p, ed $s = r^2 \pm p$, se sia $\frac{q}{s} = r$, sarà $\frac{\pm q}{s}$ la radice dell' equazione, quando essa sia commensurabile: Nel terzo caso, $\frac{\pm q}{s}$ sarà, come prima, la radice massima dell' equazione, e preso r^2 minore di p sarà similmente una delle minori radici. Il segno da premettersi al valore delle radici trovate sarà sempre contrario al segno de' quoti delle accennate divisioni, e se non si trovi l'r^2 colle due proprietà indicate, la radice sarà incommensurabile da cercarsi colla formola dimostrata.

3.° Comunque nel caso irredutibile la formola generale dia le ra-

radici dell' equazione sotto forme immaginarie, riducendo in serie infinite la formola medesima, si avrà un' approssimazione alle radici vere, e spogliata delle quantità immaginarie. La dimostrazione di questa verità appartiene al libro secondo di questa trattazione, dove si parla delle serie infinite; fatto $\frac{1}{2}q = a$, e

$$\sqrt{\frac{1}{2}q^2 - \frac{4}{27}p^3} = b\sqrt{-1},$$

sarà $x = \sqrt[3]{a \pm b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a \mp b\sqrt{-1}}$,

e svolgendo in serie ciascuno di questi radicali, la loro somma sarà reale, e se una delle quantità b, a sia molto maggiore dell' altra, con pochi termini della serie si avrà un valore d'x prossimamente vero; come ciascuno potrà vedere da se, dopo la teoría dell' evoluzione delle serie. Queste riflessioni sulle radici delle equazioni di terzo grado, daranno molto lume per le radici di grado quarto: Conchiudo quella Introduzione con un problema.

101. Problema. Due sorgenti, ciascuna delle quali scola uniformemente, hanno empiuto uno de' sottoposti conservatoj a, la prima nel tempo b, la seconda nel tempo c, ed il conservatojo d, la prima nel tempo e, la seconda nel tempo f; si cerca quant' acqua sia uscita da ciascuna sorgente.

1.º Siano x, y le quantità d'acqua, cioè il numero a cagione d'esempio de' secchi d'acqua usciti ad empire le conserve a, d nel corso di giorni b, c, e, f. Sarà bx la quantità d'acqua uscita dalla prima sorgente nel tempo b, e cy la quantità d'acqua uscita dalla seconda sorgente nel tempo c; per le condizioni del problema, queste due quantità d'acqua devono essere eguali

eguali alla quantità d'acqua a, che empie il conservatojo; si avrà dunque $bx + cy = a$.

2.° Se nel problema non entrasse altra condizione che questa, non si potrebbe determinare nè l'x, nè l'y, se non mettendo un arbitrario valore ad y, o ad x; avendosi, trasponendo

$bx = a - cy$

$cy = a - bx$, e dividendo la prima equazione per b, e la seconda per c, si avrebbe

$$x = \frac{a - cy}{b}$$

$$y = \frac{a - bx}{c},$$ e facendo $y = h$ nella prima, ed $x = k$ nella seconda, si avrebbe

$$x = \frac{a - ch}{b};$$

$$y = \frac{a - bk}{c}$$ questo problema perciò sarebbe indeterminato, ed ammetterebbe infinite soluzioni, secondo gli infiniti arbitrarj valori di h, e di k.

3.° Ma la seconda condizione del proposto problema, ci dà una nuova equazione, e determina con ciò ad una sola soluzione i valori delle due incognite x, y; dacchè si avrà ex, fy per le quantità d'acqua sparse nel tempo e, f, che prese insieme devono essere eguali a d; cioè $ex + fy = d$.

4.° Mettendo in questa equazione il valore d'x preso nella prima, e sostituendo nella prima il valore d'y presi da questa seconda equazione, si ha $x = \frac{cd - af}{ce - bf}$.

$$y = \frac{ae - db}{ce - bf}.$$

102. Se

102. Se sia $a = 195$ ..... $d = 330$; sarà $x = 30$
$b = 2$ $e = 5$ $y = 45$
$c = 3$ $f = 4$

Se $a = 120$ ..... $d = 190$; sarà $x = -30$
$b = 4$ $e = 3$ $y = 40$
$c = 6$ $f = 7$

Questi risultati adempiono esattamente tutte le condizioni del problema; nè si può anche per ciò dubitare della loro esattezza; ma che significa quel -30? Si ritenga il significato del segno $-$; si cerca quì quanta sia l'acqua che esce dalla prima sorgente, e si trova che n'esce -30 misure; lo stato opposto all'uscire non è altro che l'entrare; onde la prima sorgente tanto non ne perde, che anzi ne acquista 30, ne ruba invece di darne, invece d'impoverire arricchisce; se ciò non può succedere in qualche caso particolare, o per la natura, o per la posizione delle sorgenti, sarà pure impossibile, che si sieno verificate in quel caso le condizioni date.

103. Se oltre la somma delle perdite d'acqua a, d, ed oltre i tempi b, c, e, f si desse ancora il prodotto delle due perdite; cioè $xy = g$, il problema avrebbe più condizioni, o più equazioni che incognite; cioè sarebbe *più che determinato*. Questo eccesso di equazioni, o condizioni rendono per lo più impossibile il problema; cioè nel caso nostro sarà impossibile il problema sempre che g non sarà eguale a $\frac{cd - af}{ce - bf} \times \frac{ae - db}{ce - bf} = h$, e quando ciò succeda, si avrà sempre un' equazione identica; cioè $g = h$, cioè la condizione aggiunta sarà un' equazione inutile al problema, già sciolto per le altre due. Ben è vero, che l'identità delle equazioni non sempre mostra l'inutilità delle condizioni date; talvolta è segno, che la quistione malamente fu proposta a modo di ptoblema, ma si veramente doveva proferirsi

rirsi come un teorema; talvolta altresì mostra, che si è assunta una condizione superflua, ommessa quella che era necessaria alla soluzione del problema; talvolta finalmente indica, che s'è commesso errore nel calcolo.

LIBRO PRIMO.

Progressioni geometriche, ed aritmetiche.

CAPO PRIMO.

Delle ragioni geometriche, ed aritmetiche.

Nozioni generali sulle ragioni, e proporzioni geometriche.

1. LA teoría delle Progressioni geometriche, ed aritmetiche, suppone quella delle geometriche, ed aritmetiche ragioni, ed immediatamente trae seco la teoría de' logaritmi. Questa sarà la materia de' tre capi, in cui va distinto il presente libro, e la tratterò, spero, non senza qualche particolare eleganza, usando ad ogni passo gli artificj analitici, poc'anzi spiegati nell' introduzione.

2. Ragioni geometriche. Le voci *ragioni*, *rapporto*, significano un confronto, o un paragone di una quantità qualunque con un' altra; quando si paragona una quantità con un' altra per conoscere quante volte, o come la prima contenga l'altra, o sia nell'altra contenuta, quel rapporto, e quella ragione delle due date quantità si chiama rapporto, o ragione *geometrica*, o senz' altro aggiunto, *ragione*.

3. E' evidente. 1.° Che per avere una ragione geometrica si richieggono nè più nè meno di due termini; cioè quello, che si paragona, e quello, a cui si paragona.

2.° Che la ragione geometrica di questi due termini si conosce colla divisione d'uno d'essi per l'altro.

3.° Che quindi si può dinotare la ragione geometrica co' soliti *due punti* di divisione, o a modo d'una frazione volgare, e allora $a : b$, oppure $\frac{a}{b}$ si legge a sta a b.

4.° Che la proprietà delle frazioni volgari si convengono alle

ra-

ragioni geometriche, e quelle delle ragioni geometriche si convengono alle frazioni volgari.

5.° Che le quantità, tralle quali si fa il paragone per iscoprire la ragione di *contenenza* d'una nell'altra, devono essere della medesima specie, ed insieme considerate come quantità, o numeri astratti; cioè non considerate secondo il loro essere specifico, ma secondo l'essere numerico di ciascuna.

4. Nelle ragioni geometriche. 1.° Il primo termine, che si paragona coll'altro, si chiama *antecedente*, ed il secondo *conseguente* della ragione; il quoto della divisione dell' antecedente pel conseguente, si chiama *esponente* della ragione, e se l'esponente della ragione è una frazione, si suppone essa ridotta a minimi termini.

2.° Se l'antecedente è eguale al conseguente, la ragione geometrica si chiama ragione d'*uguaglianza*: Se l'antecedente è maggiore del conseguente, la ragione sarà di *maggiore disuguaglianza*: Se l'antecedente è minore del conseguente, la ragione sarà di *minore disuguaglianza*.

3.° Se il rapporto, che in una ragione ha l'antecedente al conseguente sia lo stesso che il rapporto, che in un'altra ragione ha il conseguente all' antecedente, si dice, che i termini della prima tra loro stanno in ragione *inversa*, o *reciproca* de' termini della seconda; e se l'antecedente di una ragione ha al suo conseguente lo stesso rapporto, che l'antecedente di un' altra al suo conseguente, si dice, che i termini della prima stanno fra loro in ragione *diretta* de' termini della seconda ragione.

4.° Se si multiplichino insieme molte ragioni *semplici* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, si chiama $\frac{ace}{bdf}$ ragione *composta* delle date; Se le ragioni componenti sono tutte tra se eguali, la ragione composta delle date ragioni prese due a due, si chiama ragione *duplicata*: prese a tre a tre *triplicata*: prese n ad n, $n^{plicata}$ di qualunque delle date: Ciascuna delle ragioni componenti, sta in ragione *sudduplicata* della composta sua dupplicata: *sut-*

tri-

triplicata della composta sua triplicata; Su $n^{plicata}$ della composta sua $n^{plicata}$.

5. Assiomi sulle ragioni semplici e composte. 1.° Le ragioni eguali hanno esponenti eguali, e le ragioni, che hanno esponenti eguali, sono eguali.

2.° Le ragioni disuguali hanno esponenti disuguali, e le ragioni d'esponenti disuguali sono disuguali.

3.° In due, o più ragioni, quella è maggiore, o minore delle altre, che ha l'esponente maggiore, o minore, e se l'esponente d'una ragione è maggiore, o minore dell'esponente delle altre, quella ragione è maggiore, o minore delle altre.

4.° Se si paragonino due quantità disuguali a, b, ad un'altra d, la più grande a avrà una maggior ragione a d che le altre, e quella tra a, b, che avrà una maggiore ragione a d, sarà maggiore delle altre.

5.° Paragonando una quantità d a due quantità disuguali a, b, la ragione di d alla più grande a sarà minore della ragione di d all'altra, e se la ragione di d ad una quantità a sarà minore della ragione di d all'altra, sarà a maggiore dell'altra.

6.° Le ragioni di d a diverse quantità eguali sono eguali, e se sono eguali le ragioni di d a diverse quantità, queste saranno tra se eguali.

7.° Non si muta la ragione di a a b comunque si multiplichi; o si divida a, b per una stessa quantità, o per quantità eguali, essendo $\frac{ma}{mb} = \frac{a}{b}$.

10.° Quindi se i termini d'una ragione sieno ugualmente, o multipli, o summultipli de' termini d'un' altra, quella prima ragione sarà a questa eguale.

6. Assiomi sulle ragioni composte. 1.° Se sono eguali ciascuna a ciascuna le ragioni, che compongono due ragioni composte, le ragioni composte sono eguali.

2.° Se

2.° Se una ragione è composta di alcune date ragioni, ogni sua eguale si potrà concepire composta delle ragioni medesime.
3.° Se vi siano due ragioni, composte ciascuna da più ragioni, e tutte le *componenti* della prima e della seconda, toltane una per una, sieno eguali, quelle due residue ancora saranno eguali.

7. Proporzioni geometriche. L'egualianza di due ragioni geometriche, si chiama *proporzione geometrica*, o, senz'altro aggiunto, *proporzione*, o *analogia*; Quindi la teoría delle proporzioni è la stessa, che la teoría delle ragioni eguali.

8. E' evidente. 1.° Che per una proporzione vi vogliono nè più nè meno di quattro termini.
2.° Che la proporzione di quattro termini si conosce dall' egualianza de' quoti del primo termine diviso pel secondo, e del terzo diviso per il quarto; cioè dall' egualianza degli esponenti delle date ragioni.
3.° Che quindi la proporzione di quattro termini a, b, c, d, si può indicare così $a:b=c:d$, oppure $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, o segnando solamente le parti estreme del segno d'ugualianza si scrive $a:b::c:d$, e si legge a sta a b, come c sta a d.
4.° Se qualunque specie di quantità si esprima co' numeri, relativi ad una unità arbitrariamente assunta in ogni specie, potranno sostituirsi questi per quelle in ogni proporzione, ed allora i quattro termini d'una proporzione saranno tutti dell'istessa specie.

9. Quanto a quest' ultima riflessione, si noti, che la ragione è un numero, e due ragioni sono due numeri, che risultano da due confronti, che ponno farsi l'uno su d'una specie, e l'altro sull' altra; così lo spazio A, doppio dello spazio B, sta a B come un tempo a, doppio del tempo b, sta a b; ma finchè la proporzione sta espressa così, non si possono fare varie operazioni, che pure sono necessarie a farsi, sulle proporzioni; tale è l'alternazione, ed il prodotto delle quantità eterogenee (dell'

alter-

alternazione parleremo da qui a poco); in questi casi è sempre uopo esprimere in puri numeri le quantità, che servono di termini alla proporzione, e considerare a cagione d'esempio negli spazj A, B, e ne' pesi a, b, non *l'essere* di *spazio*, e di *tempo*, ma l'essere di *doppio* d'uno spazio, o d'un tempo, rispetto all'altro spazio, ed all'altro tempo.

A meglio dichiarare questa importante verità, soggiungo qui le parole del Sig. d'Alembert (*Traité de Dynamique*, alla nota del num. 14.). Essendo, dice egli, lo spazio, ed il tempo di diversa natura, ben si vede, che non si può dividere lo spazio per il tempo: quindi il dire, che le velocità sono come gli spazj divisi per i tempi, egli è un dire, che le velocità sono come i rapporti degli spazj ad una stessa misura comune, divisi per i rapporti de' tempi ad un' altra comune misura; cioè, che se si prenda, a cagione d'esempio, il piede per la misura degli spazj, ed il minuto per la misura de' tempi, le velocità di due corpi, che si muovono uniformemente, sono tra se come i *numeri* de' piedi scorsi da ciascuno, divisi per i *numeri* de' minuti da ciascuno impiegati a scorrergli, e non come i *piedi* divisi per i *minuti*.

Così egli; ed a dire più corto colle parole del discorso preliminare del medesimo autore, dividere i spazj per i tempi per avere la ragione delle velocità di due corpi, significa trovare la ragione, che ha *la ragione delle parti dello spazio alla sua unità, alla ragione delle parti del tempo alla sua unità*.

10. In qualunque proporzione $a:b::c:d$ i termini a, c si chiamano *antecedenti* della proporzione, cioè a primo antecedente, c il secondo; i termini b, d si chiamano *conseguenti* della proporzione, cioè b primo conseguente, d secondo conseguente. I termini a, d si chiamano *estremi*, i termini b, c *medj*; ciascuno de' termini antecedenti, o conseguenti si chiama *omologo* all' altro antecedente, o conseguente; ciascuno de' termini estremi può chiamarsi *analogo* all' altro estremo, e ciascun de' termini

 medj

medj può chiamarsi *analogo* all' altro medio: Se i termini di mezzo sono uno stesso termine replicato, la proporzione si chiama *continua*, ed i termini sono *continuamente* proporzionali: Se i termini di mezzo sono tra se disuguali, la proporzione si chiama *discreta*, ed i termini sono *discretamente* proporzionali; il termine di mezzo d'una proporzione continua si chiama *medio geometricamente*, o, senz' altro, *medio* proporzionale.

Proprietà comuni alle eguali ragioni geometriche semplici, e composte.

11. SE $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, sarà $ad=bc$

Dim. Si multiplichi ciascun membro dell' equazione data per il prodotto de' conseguenti; o più brevemente, si levino le frazioni dalla data frazione; si avrà $ad=bc$.

12. Se $ad=bc$, sarà 1.° $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

2.° $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

3.° $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

Dim. Si divida ciascun membro della data equazione
1.° per bd, si avrà la prima)
2.° per ac, si avrà la seconda) analogìa.
3.° per cd, si avrà la terza)

13. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, sarà 1.° $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ *invertendo*

2.° $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ *alternando*

Dim.

Dim. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, farà (num. 11.) $ad=bc$; ma fe $ad=bc$, fi ha (num. 12.) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, ed $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; dunque fe $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, farà ... ec.

14. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, farà 1.° $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ *componendo*.

2.° $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ *dividendo*.

Dim. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, farà $\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1$, offia $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$.

15. Se in a, b, c, d, e, f fia $\frac{a}{b}=\frac{d}{e}$, e $\frac{b}{c}=\frac{e}{f}$, farà $\frac{a}{d}=\frac{c}{f}$ *ordinando*.

Dim. Dalla prima analogìa fi ha $\frac{b}{e}=\frac{a}{d}$, e dalla feconda fi ha $\frac{b}{e}=\frac{c}{f}$; dunque $\frac{a}{d}=\frac{c}{f}$.

16. Se nelle fteffe quantità fia $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$, e $\frac{b}{c}=\frac{d}{e}$, farà pure $\frac{a}{d}=\frac{c}{f}$, *perturbando*.

Dim. Dalla prima analogìa fi ha $af=be$, e dalla feconda fi ha $be=cd$; dunque $af=cd$, d'onde $\frac{a}{d}=\frac{c}{f}$.

17. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ed $\frac{e}{b}=\frac{f}{d}$, farà 1.° $\frac{a+e}{b}=\frac{c+f}{d}$ *conjungendo*.

2.° $\frac{a-e}{b}=\frac{c-f}{d}$ *disgiungendo*.

 Dim.

Dim. Dalla prima analogia si ha $ad = bc$, e dalla seconda $ed = bf$; dunque sommando, e sottraendo la seconda equazione dalla prima si ha $ad \pm ed = bc \pm bf$, cioè $(a \pm e)d = (c \pm f)b$; d'onde $\frac{a \pm e}{b} = \frac{c \pm f}{d}$.

18. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \ldots$ ec., si ha

1.º $\frac{a + c + e \ldots \text{ec.}}{b + d + f \ldots \text{ec.}} = \frac{e}{f} = \frac{a}{b} = \ldots$ ec. *sommando*.

2.º $\frac{a - c - e \ldots \text{ec.}}{b - d - f \ldots \text{ec.}} = \frac{e}{f} = \frac{a}{b} = \ldots$ ec. *sottraendo*.

Dim. Dalle date ragioni si ha (num. 17.) $\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$;

donde $\frac{a \pm c}{e} = \frac{b \pm d}{f}$, ed $\frac{a \pm c \pm e}{e} = \frac{b \pm d \pm f}{f}$;

dunque $\frac{a \pm c \pm e}{b \pm d \pm f} = \frac{e}{f} = \frac{a}{b} = \ldots$ ec.

19. Dati a, b, si ha 1.º $1 : a :: b : ab$

2.º $1 : \frac{a}{b} :: b : a$

La dimostrazione è manifesta dal num. 11., e dalla deffinizione della multiplicazione, e divisione di a per b.

20. Ben m'avveggo, che le formole così *seccamente* esposte in quest' articolo cagioneranno imbarazzo ai meno esercitati; accompagneranno essi, o mentalmente, o colla penna in mano tutti i calcoli accennati, o stesi ne' num. precedenti, ma all' ultimo non sapranno quale sia la formalità, che è stata presa di mira in ciascuna operazione. Conviene però avvezzarsi ad intendere il linguaggio algebraico, muto sì, ma, a chi ben lo penetra,

tra, assai più d'ogni favella espedito, e penetrante: Si usano i caratteri algebrici per generalizzare le proposizioni: Sta alla fantasìa il sostituire agli a, b.... le astratte, o contratte idee delle quantità, di cui nasca il discorso. Quando per esempio si dice, che se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, sarà $ad=bc$, s'intenda, che in quattro termini geometricamente proporzionali, il prodotto degli estremi è eguale al prodotto de' medj; quando si dice, che se $ad=bc$, sarà $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ... ec., s'intenda, che se si separi in due fattori ciascun membro d'un' equazione, si potrà formare con essi reciprocamente presi un' analogìa, nella quale se si alternino, o invertano i termini, non si turberà la proporzionalità; od anche, che se in quattro quantità a, b, c, d il prodotto delle estreme è eguale al prodotto di quelle di mezzo, quelle quattro quantità saranno in proporzione geometrica.

21. Si notino principalmente que' dieci modi d'argomentare usitatissimi in tutto il calcolo, ed anche nella geometrìa. 1.° Se il prodotto di due termini sia eguale al prodotto di due altri termini, comunque essi si ordinino in un' analogìa, si conserverà sempre la proporzione, purchè sieno messi per termini analoghi i termini dello stesso prodotto: Tutto ciò si sarebbe potuto esprimere colla sola formola se $ad=bc$, sarà $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, indicandosi con ciascuna lettera qualunque termine dello stesso prodotto.

2.° Se quattro termini sono proporzionali, lo saranno sempre, comunque si permutino di sito tra se, purchè que', che sono medj, o estremi nella data analogìa restino nelle altre, o estremi, o medj. Due di queste permutazioni hanno nome particolare, e sono l'*alternare*, ove il terzo va ad essere secondo, ed il secondo termine passa ad essere terzo, e l'*invertere*, ove i

con-

conseguenti divengono antecedenti, e gli antecedenti, conseguenti; le altre permutazioni non hanno nome proprio, e non son altro che alternazioni, o inversioni ripetute nelle analogie, che nascono dalla prima alternata, o inversa, e sono in tutto sette.

Sia $a:b::c:d$

Sarà..... I. $a:c::b:d$.... alternando la data
II. $b:a::d:c$.... invertendo la data
III. $b:d::a:c$.... alternando la II.ª
IV. $d:b::c:a$.... invertendo la III.ª
V. $d:c::b:a$.... alternando la IV.ª
VI. $c:d::a:b$.... invertendo la V.ª
VII. $c:a::d:b$.... alternando la VI.ª

3.º Se i conseguenti d'un'analogia siano antecedenti d'un'altra, si argomenta *ordinatamente*, ommettendo i termini comuni alle due analogie, e prendendo gli altri termini per termini d'una proporzione; cioè facendo termini della prima ragione i termini dell'analogia, in cui si sono ommessi i conseguenti, e termini della seconda ragione i termini dell'analogia, in cui si sono ommessi gli antecedenti.

4.º Se i termini estremi d'una analogia siano i termini di mezzo d'un'altra, si argomenta *perturbatamente;* cioè lasciati i termini comuni si prendono per i due estremi i termini dell'analogia, in cui si sono ommessi i medj.

5.º Se solamente gli antecedenti siano diversi in due analogie, e rispettivamente eguali i conseguenti, si argomenta *congiuntamente;* cioè si congiungono in una proporzione agli antecedenti della prima gli antecedenti della seconda analogia.

6.º ... ec.

Dalle dette diverse specie d'argomentare, se ne possono dedurre delle altre non meno utili di quelle prime. 1.º La somma de' termini della prima ragione d'una proporzione, sta alla somma de'

de' termini della ſeconda ragione, come il primo conſeguente ſta al ſecondo.

2.° La differenza de' termini della prima ragione ſta alla differenza de' termini della ſeconda ragione, come il primo conſeguente ſta al ſecondo.

3.° La ſomma de' termini della prima ragione ſta alla ſomma de' termini della ſeconda ragione, come la differenza de' primi termini alla differenza de' ſecondi.

4.° La ſomma de' termini d'una ragione ſta alla differenza de medeſimi, come la ſomma de' termini d'una ragione eguale ſta alla loro differenza.

5.° ... ec.

22. Invertendo la ſeconda analogìa del num. 19. ſi ha $\frac{a}{b}$: 1 :: a : b; queſto è il fondamento della teorìa delle frazioni; cioè la frazione ſta all' unità, come il numeratore ſta al denominatore; quindi 1.° ſe il numeratore d'una frazione è eguale, maggiore, o minore del denominatore, la frazione ſarà eguale, maggiore, o minore dell' unità.

2.° Se le frazioni hanno un medeſimo denominatore, ſono tra ſe in ragione diretta de' numeratori.

3.° Se le frazioni hanno un medeſimo numeratore, ſono tra ſe in ragione reciproca de' denominatori.

4.° Quindi ſe le frazioni hanno diverſi numeratori, e diverſi denominatori, ſono tra ſe in ragione compoſta della diretta de' numeratori, e dell' inverſa de' denominatori.

23. Laſcio all' induſtria di chi vuole ben apprendere la teorìa delle proporzioni il dedurre dalle coſe premeſſe varj altri teoremi, per mezzo delle traſformazioni; ne accenno alcuni.

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ſarà $ad = bc$; E 1.° Se $b = c$, ſarà $ad = b^2 = c^2$;

cioè in tre termini continuamente proporzionali, il prodotto degli

gli estremi, è eguale al quadrato del medio; e conseguentemente se in tre quantità a, b, d il prodotto ad delle estreme sia eguale al quadrato b^2 di quello di mezzo; quelle tre quantità sono in continua proporzione geometrica.

2.° Estraendo la radice quadrata da amendue i membri di quest' ultima equazione $ad = b^2$, si ha $b = \sqrt{ad}$; cioè il termine di mezzo d'una proporzione continua, è eguale alla radice quadrata del prodotto de' due estremi.

3.° Se a, d fossero due quadrati come f^2, g^2, il prodotto fg delle loro radici quadrate sarebbe medio proporzionale tra a, d; essendo $f^2 : fg :: fg : g^2$.

4.° Dividendo l'equazione $c^2 = ad$ per a, e per d; si ha $\frac{c^2}{a} = d$, $\frac{c^2}{d} = a$; cioè qualunque de' due estremi d'una proporzione continua è eguale al quadrato del termine di mezzo diviso per l'altro estremo.

5.° Dividendo allo stesso modo l'equazione $ad = bc$, primo per d, poi per c, indi per b, e finalmente per a, si ha

$$a = \frac{bc}{d} \;\dots\; c = \frac{ad}{b}$$

$$b = \frac{ad}{c} \;\dots\; d = \frac{bc}{a}$$

cioè qualunque termine d'una proporzione è eguale al prodotto de' termini non analogi, diviso per il suo analogo.

6.° Quindi si sciolgono i quattro problemi seguenti. Dati due termini qualunque d'una proporzione continua trovare il terzo. Dati tre termini qualunque d'una proporzione discreta trovare il quarto: Trovare una media proporzionale tra due date quantità: Trovare un quadrato eguale al prodotto di due date quantità.

Pro-

Proprietà comuni alle ineguali ragioni geometriche semplici, e composte.

24. **D**Ate $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, sarà $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: ad : bc$.

Dim. Si divida ad, bc per la stessa quantità bd; sarà $\frac{ad}{bd} : \frac{bc}{bd} :: \frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: ad : bc$.

25. Se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; sarà (multiplicando le due ragioni per bd) $ad > bc$; e se $ad > bc$, dividendo tutto per bd, sarà $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

26. Se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; sia $\frac{a}{b+x} = \frac{c}{d}$; sarà $\frac{b+x}{a} = \frac{d}{c}$; cioè $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$; *invertendo*.

27. Se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, sarà $\frac{a}{b} + 1 > \frac{c}{d} + 1$; cioè $\frac{a+b}{b} > \frac{c+d}{d}$; *componendo*.

28. Se $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, sarà $\frac{a}{b} - 1 > \frac{c}{d} - 1$; cioè $\frac{a-b}{b} > \frac{c-d}{d}$; *dividendo*.

29. Se $\frac{a}{b} > \frac{d}{e}$, e $\frac{b}{c} > \frac{e}{f}$, sarà $\frac{a}{d} > \frac{b}{e}$, e $\frac{b}{e} > \frac{c}{f}$; cioè $\frac{a}{d} > \frac{c}{f}$; *ordinando*.

 30. Se

30. Se $\frac{a}{b} > \frac{e}{f}$, e $\frac{b}{c} > \frac{d}{e}$, sarà $af > be$, e $be > cd$; cioè $\frac{a}{d} > \frac{c}{f}$; *perturbando*.

31. Se $a > c$; $b > d$, ed $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, sarà $ad > bc$, ed $(ad \pm ab) > (bc \pm ab$; d'onde $\frac{a}{b} > \frac{c \mp a}{d \pm b}$.

32. Se $a + b : c + d :: a : c$, ed $a + b$ la massima, sarà.........$a + b : c + d :: a : c :: b : d$; d'onde $b > d$, ed $(a + b + c) > (c + d + a)$.

33. Da questi modi d'argomentare sulle ineguali ragioni se ne possono dedurre altri assai, come nell' articolo precedente: Si poteva mettere il primo teorema di quest' articolo per teorema fondamentale di tutte le proporzioni: Se $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: ad : bc$; fatto $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, sarà $ad = bc$; quindi si ha un nuovo metodo per formare una proporzione da' membri d'un' equazione; se $ad = bc$, sarà $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} :: ad : bc$; se $a^2 d = b^2 c$, sarà $\frac{a^2}{b^2} : \frac{c}{d} :: a^2 d : b^2 c$; se......, quindi finalmente si ha un' altra, e più diretta dimostrazione dell' ultima proposizione esposta al num. 22. per le frazioni.

Proprietà particolari delle ragioni geometriche composte.

34. Essendo $\frac{ab}{cd} = \frac{a}{c} \times \frac{b}{d}$; si ha generalmente, che due prodotti sono tra se in ragione composta delle ragioni, che hanno i fat-

i fattori d'un prodotto ai fattori omologi dell' altro.

35. In qualunque numero di quantità a, b, c, d, e, f... ec., si ha $\frac{a}{f}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{d}\times\frac{d}{e}\times\frac{e}{f}$, e generalmente, in qualunque serie di quantità la ragione della prima all'ultima è composta delle ragioni delle intermedie.

36. Date a, b; sarà $a^{\frac{m}{n}}$ a $b^{\frac{m}{n}}$ in ragione $\frac{m}{n}$ plicata di $a:b$.

Se $n=1$, ed m sia successivamente 2; 3; 4;... ec. sarà $\frac{a^2}{b^2}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$, cioè i quadrati a^2, b^2 sono in ragione dupplicata delle sue radici; così $\frac{a^3}{b^3}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$; cioè i cubi a^3, b^3 sono in ragione triplicata delle sue radici... ec. Se $m=1$, ed n sia successivamente 2; 3; 4;... ec., sarà $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}\times\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}=\frac{a}{b}$; $\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}\times\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}\times\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}=\frac{a}{b}$... ec. cioè le radici sono in ragione suddupplicata, suttriplicata.... de' loro quadrati, cubi... ec. Se m, n sieno amendue, numeri maggiori dell'unità, fatto $m=3$, ed $n=2$, $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$ saranno in ragione sesquiplicata di $\frac{a}{b}$, o in ragione suddupplicata di $\frac{a^3}{b^3}$... ec.

37. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, sarà $\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}$.

 Dim.

Dim. $\frac{a^n}{b^n}$ è in ragione $n^{plicata}$ di $\frac{a}{b}$, o del suo eguale $\frac{c}{d}$; ma $\frac{c}{d}$ è in ragione sun^{plicata} di $\frac{c^n}{d^n}$; dunque $\frac{a^n}{b^n}$ è in ragione $n^{plicata}$ della sun^{plicata} di $\frac{c^n}{d^n}$; ed essendo la ragione $n^{plicata}$ della sun^{plicata} la stessa ragione d'egualianza, sarà $\frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}$.

38. Date a, b, si ha

1.° $a^2 : a\ b :: a\ b : b^2$

2.° $a^3 : a^2\ b :: a^2\ b : a\ b^2 :: a\ b^2 : b^3$

3.° $a^4 : a^3\ b :: a^3\ b : a^2\ b^2 :: a^2\ b^2 : a^2\ b^3 :: a^2\ b^3 : b^4$.

4.° ... ec.

La dimostrazione è manifesta, essendo, a cagion d'esempio, nella seconda proposizione

$$\left.\begin{array}{l} a^3 : a^2\ b \\ a^2\ b : a\ b^2 \\ a\ b^2 : b^3 \end{array}\right\} :: a : b.$$

39. Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, sarà $\frac{a\,c}{b\,c} = \frac{b\,c}{b\,d}$.

Dim. Dalla data analogia, si ha

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a\,c}{b\,c} = \frac{a}{b} \\ \frac{b\,c}{b\,d} = \frac{c}{d} \end{array}\right\}; \text{ dunque } \frac{a\,c}{b\,c} = \frac{b\,c}{b\,d}.$$

40. Se

40. Se $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ed $\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$, farà (multiplicando infieme le due date equazioni) $\frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh}$.

I.	II.
41. Se $a:b::c:d$	$a:b::c:d$
$b:e::g:f$	$e:f::g:c$
$e:i::h:k$	$h:i::k:g$
$i:l::m:n$	$m:n::l:k$
... ec.	... ec.
III.	**IV.**
$a:b::c:d$	$a:b::c:d$
$c:e::g:h$	$e:d::f:g$
$g:i::k:l$	$h:g::i:l$
$k:f::m:n$	$m:l::n:k$
... ec.	... ec.

Sarà dalla I.ª $a:l::cghm:dfkn$
dalla II.ª $aehm:bfin::l:d$
dalla III.ª $a:beif::m:dhln$
dalla IV.ª $aehm:h::cfin:k$

Tutto è evidente; effendo, per efempio, nella prima ferie $\frac{abei}{beil}=\frac{cghm}{dfkn}$; e riducendo a minimi termini la prima frazione, fi ha $\frac{a}{l}=\frac{cghm}{dfkn}$. Cioè in generale ne' termini delle Analogíe formate dalla multiplicazione de' termini omologi di più Analogìe date, fi potrà tante volte ommettere qualche termine delle Analogìe componenti, quante egli ferve d'antecedente, e di confeguente nelle prime loro ragioni, o d'antecedente, e di confeguente nelle feconde ragioni, o di antecedente, o di confeguente in amendue... ec.

42. I

42. I due teoremi de' num. 34. 35. appartengono alle ragioni composte di ragioni qualunque; gli altri, che seguono, appartengono alle ragioni composte di ragioni eguali. Infiniti sono i problemi, che col mezzo degli esposti teoremi si sciolgono per le ragioni composte d'amendue i generi. Sono troppo manifesti que', che risguardano le ragioni composte di ragioni eguali, come sarebbe; trovare una ragione dupplicata, triplicata, $n^{plicata}$ d'una data ragione; trovare una ragione sudduplicata, suttriplicata, su $n^{plicata}$ d'una data ragione... ec.. Si noti principalmente la proposizione del num. 38. Serve essa per conoscere il numero de' medj razionali, che si possono inserire tralle potenze qualunque di due quantità; anzi con quelle formole restano questi agevolmente determinati. Tra' quadrati di a, b, si può inserire un solo medio continuamente proporzionale, ed è ab; tra i cubi di a, b se ne possono inserire due, e sono $a^2 b$, ab^2; tra... ec. E' facile il vedere, che le proposte formole, e le altre, che verrebber dopo non sono, che i termini delle potenze del binomio $a+b$, ommessi i segni, che gli congiungono, ed i coefficienti di ciascun termine (Tav. II.ª). La potenza quarta di $a+b$ è $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$; ommettendo i segni, ed i coefficienti, si ha a^4, $a^3 b$, $a^2 b^2$, $a b^3$, b^4; cioè tra a^4, e b^4 si possono inserire tre medj proporzionali, e sono $a^3 b$, $a^2 b^2$, $a b^3$; e tralle potenze m di a, b si può inserire un numero $m-1$ de' medj proporzionali, ed il termine $(n-1)^{esimo}$ della formola di qualche potenza di $a+b$ spogliato del segno, e del coefficiente, è l'n^{esimo} de' medj, che si possono inserire tra a^{m-1}, e b^{m-1}. Qui si parla sempre de' medj proporzionali, che sono razionali; parlando assolutamente, tra due quantità, qualunque esse sieno, si possono inserire infiniti medj proporzionali, come vedremo. Quanto ai primi due teoremi sulle ragioni composte di ragioni qualunque, basti, per vederne la fecondità, la soluzione de' seguenti cinque problemi.

43. Data

43. Data qualunque ragione $\frac{a}{f}$, formarne una ragione comunque composta, ed eguale alla data.

Tra a, f si concepisca qualunque numero d'intermedie b, c, d, e; si avrà $\frac{a}{f} = \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{d} \times \frac{d}{e} \times \frac{e}{f}$ (num. 35.)

44. Dato qualunque numero di ragioni componenti, formarne una ragione composta.

E' manifesto che il prodotto delle date componenti sarà la ragione cercata: Ma avvi un altro metodo più elegante, e più utile in tutto il calcolo, e nella geometria;

1.° Se sien due le ragioni date $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, si faccia $a : b :: d : \frac{bd}{a} = p$; sarà $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{p}$.

2.° Se sieno date tre ragioni componenti $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$; componendo le prime due $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{p}$, e sarà ridotto il problema a cercare la ragione composta di $\frac{c}{p}$, $\frac{e}{f}$.

3.° Se vi sia qualunque numero A di date ragioni, si cerchi la ragione composta delle prime due; sostituita questa in A si avrà una nuova serie B di ragioni, che conterrà una ragione meno di A, e collo stesso metodo si cambierà la serie B in C, e C in D; fino ad avere una sola ragione, che sarà la composta delle date A.

45. Data la ragione composta $\frac{a}{f}$, e tutte le ragioni componenti meno una, trovare questa ragione incognita.

E'

E' evidente, che dividendo la composta ragione $\frac{a}{f}$ per il prodotto A delle date ragioni componenti, il quoto B sarà la ragione cercata.

Altro metodo. 1.° Se la ragione $\frac{a}{f}$ è composta di due ragioni, una delle quali sia $\frac{c}{d}$, si faccia $c:d::a:\frac{ad}{c}=p$; sarà $\frac{p}{f}$ l'altra ragione componente; oppure $d:c::f:\frac{cf}{d}=q$, sarà $\frac{a}{q}$ la ragione cercata;

2.° Se la ragione $\frac{a}{f}$ è composta di tre ragioni, due delle quali siano date; si faccia $\frac{p}{q}$ composta delle due date, e quindi $p:q::a:\frac{aq}{p}=r$, oppure $q:p::f:\frac{pf}{q}=s$, sarà $\frac{r}{f}$, o $\frac{a}{s}$ la ragione cercata.

3.° Ed in generale; qualunque sia il numero delle ragioni componenti, si chiami A la ragione composta delle date, e B la ragione, che si cerca; si sarà sempre nel caso, in cui data la composta AB, ed una delle componenti A, si cerca B.

46. Data la ragione composta $\frac{a}{f}$, ed una delle componenti A, trovare la ragione B composta delle altre.

E' chiaro, che B comunque composta, è una delle componenti di $\frac{a}{f}$; e che perciò si riduce il presente problema al precedente.

47. Variare all' infinito la più semplice espressione d'una ragione comunque composta.

1.° Si può prendere qualunque antecedente delle ragioni componenti per antecedente della ragione equivalente alla data.

Se

Se sien date $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \times \frac{g}{h}$, e si voglia a per antecedente della ragione composta, si faccia $c:d::b:\frac{bd}{c}=p$, ed $e:f::p:\frac{fp}{e}=q$, indi $g:h::q:\frac{qh}{g}=r$; sarà $\frac{a}{r}$ la ragione equivalente alla data.

2.° Si può prendere per conseguente della ragione composta qualunque conseguente h delle ragioni, che compongono la data, e facendo $d:c::a:\frac{ac}{d}=p$; ed $f:e::p:\frac{ep}{f}=q$, e finalmente $h:g::q:\frac{gq}{h}=r$, sarà $\frac{r}{h}$ la ragione cercata.

3.° Si può prendere qualunque quantità n per antecedente, o per conseguente della cercata; si avrà $a:b::n:\frac{bn}{a}=p$; e $c:d::p:\frac{dp}{c}=q$, indi $e:f::q:\frac{fq}{e}=r$; e finalmente $g:h::r:\frac{hr}{g}=s$, ed $\frac{n}{s}$ sarà la ragione cercata.

Delle ragioni, e proporzioni aritmetiche.

48. Oltre il modo di paragonare una quantità all'altra dello stesso genere per mezzo della divisione, ve n'ha un altro, che si fa colla sottrazione; quando si cerca la ragione di contenenza d'una quantità in un'altra, quella ragione, come detto è, si chiama ragione geometrica, e quando si cerca la ragione di differenza d'una all'altra quantità, quella ragione si chiama *ragione aritmetica:* e siccome la proporzione geometrica è un'ugualianza di due ragioni geometriche, così la *proporzione aritmetica* è un'ugualianza di due ragioni aritmetiche; onde in amendue le proporzioni si può usare lo stesso

 segno

segno per separare una ragione dall' altra. Per essere più uniformi ne' segni, che separano i termini della ragione aritmetica, pare, che si dovrebbe usare nelle aritmetiche ragioni il segno della sottrazione, siccome nelle geometriche si usa quello della divisione; ma è più in uso il separargli con un sol punto, cui dalla natura delle quistioni s'intenderà non essere segno di multiplicazione; finalmente, è chiaro, che la ragione, e la proporzione aritmetica così disegnata, si potrà leggere come la geometrica, col noto *sta*, *come*.... Ciò basta per far comprendere cosa sia antecedente, conseguente, termine omologo, analogo.... d'una ragione, o proporzione aritmetica.

49. Per le ragioni aritmetiche, si noti. 1.º Che anche in esse si possono considerare le ragioni composte; Si può dire, a cagione d'esempio, che la ragione aritmetica di 15 a 9, è composta delle tre ragioni di 15 a 12, di 6 a 4, e di 10 a 9. 2.º Che nelle ragioni aritmetiche si possono considerare le ragioni doppie, triple...., appunto come nelle geometriche si considerano le dupplicate, triplicate....La ragione geometrica di 8 a 2 è dupplicata della ragione geometrica di 8 a 4, e del pari la ragione aritmetica di 8 a 2 è doppia della ragione aritmetica di 8 a 5.

50. Per le proporzioni aritmetiche. La proposizione fondamentale si è, che se $a.b=c.d$, sarà $a+d=b+c$; e se $a+d=b+c$, sarà $a.b=c.d$; cioè, che in quattro termini aritmeticamente proporzionali la somma degli estremi è eguale alla somma de' medj, e se in quattro termini la somma degli estremi è eguale alla somma de' medj, que' quattro termini sono aritmeticamente proporzionali. Tutto è evidente; avendosi dalla deffinizione, che se $a.b=c.d$, sarà $a-b=c-d$, e trasponendo il b, ed il d, sarà $a+d=b+c$; e se $a+d=b+c$, trasponendo il b, ed il d, sarà $a-b=c-d$, donde $a.b=c.d$.

51. Quindi nella proporzione aritmetica continua la somma degli estremi è eguale al doppio di quel di mezzo; e se in tre

ter-

termini, la somma degli estremi è eguale al doppio di quel di mezzo, que' tre termini sono in aritmetica proporzione continua. Ciò è evidente dalla dimostrazione precedente, e dalla trasformazione della precedente equazione; Si faccia $b = c$, sarà $a + d = 2b = 2c$, e se $a + d = 2c$, sarà $a - c = c - d$, cioè $a . c = c . d$.

52. Si noti sulle proporzioni aritmetiche, che si possono in esse usare que' modi d'argomentare, che si sono esposti al n. 13. per le proporzioni geometriche. Se $a . b = c . d$, sarà alternando $a . c = b . d$.... ec. Allo stesso modo si possono applicare alle ragioni aritmetiche ineguali la proprietà delle ineguali ragioni geometriche, o semplici, o composte.

53. Quindi si ha la soluzione di tutti i problemi, che dipendono dalle proporzioni aritmetiche. Dati tre termini d'una proporzione aritmetica discreta, trovare il quarto; dati due termini d'una proporzione aritmetica continua, trovare il terzo .... ec. Nella proporzione discreta, la somma de' termini non analoghi meno il dato termine analogo al cercato è eguale al termine cercato; nella proporzione continua la metà della somma de' termini estremi è eguale al termine di mezzo; il doppio del termine di mezzo meno uno degli estremi è eguale all'altro estremo ... ec.

Delle proporzioni armoniche, e contro-armoniche.

54. SE tre date quantità, o piuttosto numeri, a, b, c siano così disposte, che la prima stia alla terza, geometricamente come la differenza tralla prima, e la seconda, sta alla differenza tralla seconda, e la terza, ossia, che $a : c :: a - b : b - c$, quelle tre quantità sono in proporzione *armonica continua*. Se quattro quantità a, b, c, d siano tali, che $a : d :: a - b : c - d$, quelle quattro quantità sono in proporzione *armonica discreta*. Se tre quantità a, b, c sieno tali, che $c : a :: a -$

 b:

$b:b-c$, o se quattro quantità a, b, c, d sieno tali, che $d:a::a-b:c-d$, quelle quantità sono in proporzione *contro-armonica*, o continua, o discreta.

55. L'uso principale di queste analogìe, è di trovare uno de' termini della proporzione armonica, o contro-armonica, di cui siano dati gli altri. Multiplicando gli estremi, ed i medj di ciascuna delle quattro precedenti analogìe, e liberando coi metodi noti ciascuna lettera, si ha

1.° Per le proporzioni armoniche continue

$$a=\frac{bc}{2c-b}$$

$$b=\frac{2ac}{a+c}$$

$$c=\frac{ab}{2a-b}$$

2.° Per le proporzioni armoniche discrete

$$a=\frac{bd}{2d-c}$$

$$b=\frac{(2d-c)a}{d}$$

$$c=\frac{(2a-b)d}{a}$$

$$d=\frac{ac}{2a-b}$$

3.° Per le proporzioni contro-armoniche continue

$$a=\frac{1}{2}b\pm\sqrt{(b-c)c+\frac{1}{4}b^2}$$

$$b=\frac{a^2+c^2}{a+c}$$

$$c=\frac{1}{2}b\pm\sqrt{(b-a)a+\frac{1}{4}b^2}$$

4.° Per

4.° Per le proporzioni contro-armoniche discrete

$$a = \frac{1}{2} b + \sqrt{(c-d)d + \frac{1}{4} b^2}$$

$$b = \frac{(d-c)c}{a} - a$$

$$c = \frac{(a-b)a}{d} + d$$

$$d = \frac{1}{2} c \pm \sqrt{(b-a)a + \frac{1}{4} c^2}$$

56. Paragonando ciascun valore de' termini d'una proporzione armonica, o contro-armonica, col valore de' termini d'una proporzione aritmetica, si scopriranno molte eleganti proprietà comuni a questi due generi di proporzioni. A cagione d'esempio, per le proporzioni armoniche continue. 1.° Se a, b, c siano in proporzione aritmetica continua, saranno ab, ac, bc in continua proporzione armonica; dacchè, se $a . b = b . c$, sarà $a + c = 2b$, e multiplicando quest' equazione per abc, si ha $a^2 bc + abc^2 = 2ab^2 c$, ossia $a^2 bc - ab^2 c = ab^2 c - abc^2$; cioè $ab(ac - bc) = bc(ab - ac)$; donde $ab : bc :: ab - ac : ac - bc$.
2.° Se si divida una stessa quantità per altre quantità, che siano in continua proporzione armonica, i quozienti saranno in continua proporzione aritmetica; dacchè, se a, b, c sono in continua proporzione armonica, sarà $b = \frac{2ac}{a+c}$; dunque dividendo qualunque quantità d per a, b, c, ossia per a, $\frac{2ac}{a+c}$, c, si avrà $\frac{d}{a}$, $\frac{ad+dc}{2ac}$, $\frac{d}{c}$, e $2\frac{(ad+dc)}{2ac} = \frac{d}{a} + \frac{d}{c}$.
3.° Allo stesso modo si dimostra, che dividendo una quantità per altre, che siano in continua proporzione aritmetica, i quozienti saranno in continua proporzione armonica, donde si ricava

cava, che invertendo i termini di una delle proporzioni armonica, ed aritmetica, col formare frazioni, che abbiano l'unità per numeratore, ed i detti termini per denominatore, l'una si trasforma nell'altra.

CAPO

CAPO SECONDO.

Delle progreſſioni Geometriche, ed Aritmetiche.

Progreſſioni Geometriche.

57. *PRogreſſione geometrica*, ſignifica una ſerie di termini in continua proporzione geometrica; ſi nota all' iſteſſo modo, come la proporzione continua, oppure col ſegno $\div\!\div$ meſſole verſo la ſiniſtra, con un punto di ſeparazione d'un termine dall' altro. Già ſi vede, che ciaſcun termine della progreſſione geometrica fuori del primo, è conſeguente, e che ciaſcuno, fuori dell' ultimo, è antecedente, e che chiamando s la ſomma di tutti i termini, b il primo, t l'ultimo termine; Sarà $s-b$ la ſomma di tutti i conſeguenti, ed $s-t$ la ſomma di tutti gli antecedenti termini della progreſſione. Conviene diſtinguere la progreſſione geometrica *aſcendente*, dalla *deſcendente*; in quella i termini vanno ſucceſſivamente creſcendo da ſiniſtra a deſtra, ed in queſta vanno ſempre ſcemando; nella prima ſi chiama *ragion comune* della progreſſione l'eſponente della ragione d'un termine qualunque diviſo per quello, che lo precede verſo la ſiniſtra; la *ragion comune* della ſeconda progreſſione, è l'eſponente della ragione d'un termine qualunque diviſo, per quello, che gli vien dopo verſo la deſtra. Noi parleremo ſolamente della progreſſione aſcendente, eſſendo facile l'applicare le proprietà di queſta progreſſione alla deſcendente, o col roveſciar tutti i termini della progreſſione, o col cambiare alcuni ſegni nelle formole, che anderemo eſponendo.

58. Prima propoſizione fondamentale. Se a è la ragione comune della progreſſione, ed m il numero, che eſprime il ſito, che occupa nella progreſſione un certo termine t, o (che è lo

ſteſſo)

ſteſſo) ſe m eſprime il numero de' termini della progreſſione, ſarà $t = b\,a^{m-1}$.

Dim. Nella progreſſione $\div b.c.d.e \ldots\ldots t$, ſi ha $\frac{c}{b} = a$, cioè $c = a\,b$; ed eſſendo $b:c::c:d$, oſſia $b:ab::ab:d$, ſarà $d = a^2\,b$; così pure dall' analogìa $c:d::d:e$, oſſia $ab:a^2\,b::a^2\,b:e$, ſarà $e = a^3\,b$; e così nel reſto; diſponendo in ordine i valori di ciaſcun termine, ſi ha

il ſecondo .... $c = b\,a^1$
il terzo .... $d = b\,a^2$
il quarto ...... $e = b\,a^3$
il m^{esimo} .... $t = b\,a^{m-1}$.

59. Seconda propoſizione fondamentale. In qualunque progreſſione geometrica la ſomma degli antecedenti ſta alla ſomma de' conſeguenti, come qualunque antecedente b' ſta al ſuo conſeguente c'; cioè $s-t : s-b :: b' : c'$.

Dim. Per la natura della progreſſione, ſi ha $\frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \ldots$ ec.; dunque (num. 18.) $\frac{b+c+d+\ldots \text{ ec.}}{c+d+e+\ldots \text{ ec.}} = \frac{d}{e} = \frac{c}{d} = \ldots\ldots \frac{b'}{c'}$.

60. Dalla prima propoſizione fondamentale ſi hanno le ſeguenti ſei propoſizioni. 1.ª Dato il primo termine b, e la ragione comune a d'una progreſſione geometrica, ſi poſſono trovare tutti gli altri, o qualunque degli altri termini della medeſima.

La formola $t = b\,a^{m-1}$, rappreſenta ciaſcun termine m^{esimo} della progreſſione; onde ſe ſi voglia in particolare un termine d'una tale determinata claſſe, o ſito, ſi faccia m eguale al numero, che lo indica; ſe ſi vogliano ſucceſſivamente tutti i termini della progreſſione, ſi faccia ſucceſſivamente m eguale ad 1. 2. 3. 4... ec.

61. 2.ª propoſizione. Qualunque progreſſione geometrica, che

che incomincia da b, ed ha a per ragione comune, è rappresentabile per $\div\!\!\div b . ba . ba^2 . ba^3 \ldots$ ec.

62. 3.ª Dato il primo termine b, l'ultimo t, e la ragione comune a, si ha il numero m de' termini inclusivamente l'ultimo; e dato il primo termine b, l'ultimo termine t, ed il numero de' termini m, si ha la ragione comune a.

Dacchè 1.° si multiplichi per $\frac{a}{b}$ ciascun membro dell'equazione $t = ba^{m-1}$; si ha $\frac{ta}{b} = a^m$: Si alzi a alla potenza prima, seconda, terza.... fino ad avere un numero eguale a $\frac{ta}{b}$; l'esponente di questa potenza sarà il valore di m.

2.° Si divida l'equazione medesima per b; si ha $\frac{t}{b} = a^{m-1}$, ed estraendo la radice $m-1$; si ha $a = \sqrt[m-1]{\frac{t}{b}}$.

63. 4.ª Se r è il numero de' termini interposti tra due qualunque dati termini d'una progressione geometrica, il termine maggiore, sta al minore in ragione ($r+1^{plicata}$) della ragione comune.

Così $\frac{ba^2}{b} = a^2$; $\frac{ba^3}{b} = a^3$ .... ec., cioè, se tra i due termini dati se ne è ommesso uno, il maggiore sta al minore in ragione dupplicata di a; se se ne sono ommessi due, il maggiore sta al minore in ragione triplicata.... ec.; dacchè ciascuna di queste ragioni è composta d'un numero $r+1$ di eguali ragioni intermedie.

64. 5.ª Se ba^s, ba^r siano termini della progressione geometrica, distanti l'uno dall'altro $r-s$, e ba^p, ba^{p+1} siano due altri termini qualunque tra se vicini, sarà $ba^r : ba^s :: b^{r-s} a^{p(r-s)} : b^{r-s} a^{(p+1)(r-s)}$.

 Dac-

Dacchè l'esponente delle due ragioni è sempre a^{r-1}. Così, per esempio, il primo termine d'una progressione geometrica sta al terzo, come il quadrato del primo sta al quadrato del secondo termine; il primo termine sta al quarto, come il cubo del primo sta al cubo del secondo; il terzo sta al nono, come la sesta potenza di qualunque antecedente, sta alla sesta potenza del suo conseguente .... ec.

65. 6.ª Tra due quantità b, t trovare un numero r di medj geometricamente proporzionali.

E' evidente, che se si troverà il primo de' cercati medj proporzionali, si troveranno, per il num. 58., tutti gli altri: Sia adunque x il primo de' medj cercati; Sarà per il num. precedente $t:b::x^{r+1}:b^{r+1}$; dunque 1.° $tb^{r+1}=bx^{r+1}$

$$2.° \quad tb^{r} = x^{r+1}$$

$$3.° \quad \sqrt[r+1]{tb^{r}} = x.$$

66. Dalla seconda proposizione fondamentale si ha; 1.°, dividendo, $c'-b':b'::t-b:s-t$; cioè in una progressione geometrica qualunque termine meno il precedente sta al precedente, come l'ultimo meno il primo sta alla somma di quegli, che precedon l'ultimo.

67. 2.° E se $c'=nb'$, sarà $nb'-b':b'::t-b:s-t$; cioè $(n-1)b':b'::t-b:s-t$; donde $t-b=\frac{(n-1)b'(s-t)}{b'}$ $=(n-1)(s-t)$; cioè, se in una progressione geometrica il secondo termine sia n^{plo} del primo (o come altri dicono più acconciamente, se regni nella progressione la ragione n^{pla}); la differenza de' termini estremi sarà $(n-1)^{pla}$ della somma de' termini, che precedon l'ultimo.

68. 3.° Dati il primo, e l'ultimo termine, con due altri termini qualunque tra se vicini; oppure, data la ragion comu-

ne,

ne, ed il primo, e l'ultimo termine; o dato il numero de' termini, il primo termine, e la ragion comune d'una progressione geometrica; o finalmente dato il primo, e l'ultimo termine, ed il numero de' termini; si ha la somma di tutti i termini; cioè

$$1.^\circ \quad s = \frac{c' t - b' b}{c' - b'}$$

$$2.^\circ \quad s = \frac{a t - b}{a - 1}$$

$$3.^\circ \quad s = b\,\frac{a^m - 1}{a - 1}$$

$$4.^\circ \quad s = \frac{t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}}{t^{\frac{1}{m-1}} - b^{\frac{1}{m-1}}}$$

Dacchè 1.° multiplicando gli estremi, ed i medj dell' analogia, si ha $s(c' - b') = c' t - b' b$, donde $s = \frac{c' t - b' b}{c' - b'}$.

2.° Se b', c' fossero i primi due termini b, c della progressione, cioè fossero b, ba, sarebbe $s = \frac{b a t - b^2}{b a - b} = \frac{a t - b}{a - 1}$.

3.° Sostituendo invece di t il suo valore $b a^{m-1}$, sarebbe

$s = \frac{b a^{m-1}\, a - b}{a - 1} = b\,\frac{a^m - 1}{a - 1}$.

Finalmente 4.° per essere $a = \sqrt[m-1]{\frac{t}{b}} = \frac{t^{\frac{1}{m-1}}}{b^{\frac{1}{m-1}}}$

 Si

$$\text{Si ha } a - 1 = \frac{t^{\frac{1}{m-1}}}{b^{\frac{1}{m-1}}} - 1 = \frac{t^{\frac{1}{m-1}} - b^{\frac{1}{m-1}}}{b^{\frac{1}{m-1}}}$$

$$a^m = \frac{t^{\frac{m}{m-1}}}{b^{\frac{m}{m-1}}}$$

$$a^m - 1 = \frac{t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}}{b^{\frac{m}{m-1}}}$$

$$\text{donde } s = b\,\frac{a^m - 1}{a - 1} = \frac{t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}}{t^{\frac{1}{m-1}} - b^{\frac{1}{m-1}}}$$

69. 4.° Dividendo l'equazione $s = b\,\frac{a^m - 1}{a - 1}$ per $\frac{a^m - 1}{a - 1}$, si ha $b = s\,\frac{a - 1}{a^m - 1}$, cioè, data la somma, il numero de' termini, e la ragion comune, si ha il primo termine della progressione.

70. 5.° Sostituendo nella formola $t = b\,a^{m-1}$, questo valore di b, si ha l'espressione generale di qualunque termine, data la somma, il numero de' termini, e la ragion comune, cioè $t = s\,\frac{a^m - a^{m-1}}{a^m - 1}$.

71. 6.° Si può avere la ragion comune della progressione, data la somma degli antecedenti, e de' conseguenti; dacchè $b : ba :: s - t : s - b$, donde $bs - b^2 = bas - bat$, ossia $s - b = as - at = a(s - t)$; cioè $a = \frac{s - b}{s - t}$.

72. Le

72. Le premesse due proposizioni fondamentali, ed i corollarj da esse dedotti sono fecondissimi d'altre proposizioni, che ciascuno, confrontando ciascuna formola con tutte le altre, potrà da se dedurre senza pena. Si ha a cagione d'esempio

$$b = s + at - as = s \div (t - s)\, a$$

$$t = \frac{as + b - s}{a} = \frac{(a-1)\, s + b}{a}$$

e dal num. 65. si può compire una progressione geometrica, di cui non sia dato, che il primo, ed un altro termine qualunque, col numero de' termini intermedj; basta fare r eguale al numero degli intermedj, e si avrà x secondo termine della progressione; e fatto $m = r \div 2, \ldots$ si determinerà successivamente la formola $t = b\, a^{m-1}$.

Delle progressioni Aritmetiche.

73. *Progressione aritmetica*, significa una serie di termini in continua proporzione aritmetica: Si nota allo stesso modo come la proporzione aritmetica, o col segno $\div$ messole verso la finistra, ed un punto di separazione tra un termine, e l'altro. Anche la progressione aritmetica può essere ascendente, o discendente; tratterò solo dell' ascendente. Nell' articolo precedente mi sono steso più forse del bisogno a svolgere con parole le formole algebraiche, che danno le dimostrazioni de' teoremi, e le soluzioni de' problemi sulle progressioni geometriche; ho giudicato di doverlo fare, per avvezzare il lettore anche in questa materia delle progressioni a penetrare lo stato, e le condizioni della quistione col solo contemplare attentamente le formole: Non sarà uopo di tanto in quest' articolo, nel quale ciascuno potrà dedurre (come detto è per le progressioni geometriche) delle nuove formole, che qui ommetto per essere, o troppo facili, o meno necessarie. 74. Pro-

74. Propofizione fondamentale. Se b è il primo termine, a la differenza, o la ragione comune, m il numero, che esprime il fito d'un termine qualunque, o il numero de' termini della progreffione, fino ad effo inclufivamente, farà $t = b + (m - 1) a$.
Dim. Nella progreffione aritmetica $\div b . c . d . e . f ..... t$; fi ha $c - b = a$, cioè $c = b + a$, ed effendo $b . c = c . d$, offia $b . b + a = b + a . d$, farà $d = b + 2 a$.. ec.;
cioè il primo termine effendo b

il fecondo è $b + a$

il terzo è $b + 2 a$

il m^{efimo} è $b + (m - 1) a$

75. Seconda propofizione fondamentale. Se t è l'ultimo termine, ed s la fomma di tutti i termini della progreffione aritmetica, fara 1.° $t - b = m a - a$

2.° $2 s \; = m b + m t$

La prima formola è evidente, trafponendo il b della formola del num. 74., la feconda fi dimoftra così: Nella progreffione aritmetica $\div b . c . d . e . k . t$, per la deffinizione fi ha $b . c = k . t$,

$b . d = e . t$

dunque $b + t = c + k$

$b + t = d + e$; cioè $2 (b + t) = (c + k) + (d + e)$, e $3 (b + t) = s$, donde $6 (b + t) = 2 s$; ma 6 è il numero m de' termini della progreffione, dunque $m (b + t) = 2 s$.

76. Dalla formola del num. 74.; 1.° Dato il primo termine b della progreffione aritmetica, e la differenza comune a, fi poffono trovare fucceffivamente tutti gli altri termini, o qualunque termine della progreffione.
Si faccia nella formola di t, la lettera m eguale all' efponente del fito, che deve occupare il termine cercato; o fe fi vogliano fucceffivamente tutti gli altri termini della progreffione dopo b, fi faccia m fucceffivamente eguale a 2 . 3 . 4 . 5 ... ec.

77. 2.° Qualunque progreffione aritmetica, che incomincia

da

da b, ed ha a per differenza comune, si può rappresentare da $\div$ $b . b+a . b+2a . b+3a \ldots$ ec.

78. 3.° Tra due dati termini t, b trovare un numero r di medj t aritmeticamente proporzionali.
Si divida la differenza $t-b$ per $r+1$; il quoziente sarà l'a della progressione, con cui, per il num. 74., si troveranno tutti i termini della medesima. Dacchè se si cerca un numero r di termini intermedj, compiuta che sia la progressione, si dovranno avere $r+1$ differenze, e tutte tra se eguali, la cui somma deve equivalere a $t-b$; dunque ciascuna di queste sarà $\frac{t-b}{r+1}$.

79. Colle formole del num. 75. si sciolgono tutti i problemi, che appartengono alle progressioni aritmetiche. In ciascuna di quelle formole si contengono quattro lettere; liberando adunque co' noti metodi ciascuna di queste, si avrà il suo valore colle altre tre; cioè in tutto si avranno otto formole per gli m, a, b, t, s. Sostituendo nella seconda formola il valore di t, di a, e di m presi dalla prima, si avranno tre altre formole di quattro lettere per ciascuna, da ciascuna di queste si dedurranno, come prima, quattro nuove formole, cioè in tutto dodici formole, che colle prime otto daranno venti formole, che comprendono tutti i casi possibili delle progressioni aritmetiche. Il problema generale, che comprende tutti questi venti casi è *dati i valori di tre lettere* m, a, b, t, s, *trovare il valore di ciascuna delle altre due.*

80. Facendo il calcolo accennato nel num. precedente, si ha

Prima formola	Seconda formola
$t-b=ma-a$	$2s=mb+mt$
I. $b=t-(m-1)a$	I. $b=\frac{2s}{m}-t$
II. $t=b+(m-1)a$	II. $t=\frac{2s}{m}-b$
III. $a=\frac{t-b}{m-1}$	III. $s=\frac{m}{2}(b+t)$
IV. $m=1+\frac{t-b}{a}$	IV. $m=\frac{2s}{b+t}$

Seconda formola,
trasformata col valore di t preso dalla prima

$$2s = 2mb + m^2 a - ma$$

I. $b = \frac{1}{m} s - \frac{m-1}{2} a$

II. $a = \frac{2(s - mb)}{m \cdot \overline{m-1}}$

III. $s = mb + \frac{m \cdot \overline{m-1}\, a}{2}$

IV. $m = \frac{1}{2} - \frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \frac{2s-b}{a} + \frac{1}{4}}$

Seconda formola,
trasformata col valore di m preso dalla prima

$$2s = b + t + \frac{t^2 - b^2}{a}$$

I. $b = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{(t+a)t - (2s - \frac{1}{4} a) a}$

II. $t = -\frac{1}{2} a \pm \sqrt{(b-a)b + (2s - \frac{1}{4} a) a}$

III. $a = \frac{t^2 - b^2}{2s - b - t}$

IV. $s = \frac{b-t}{2} + \frac{t^2 - b^2}{2a}$

Seconda formola,
trasformata col valore di a preso dalla prima

$$2s = 2mt - m^2 a + ma$$

I.ª

I. $t = \frac{1}{m} s + \frac{m-1}{2} a$

II. $a = \frac{2(mt - s)}{m \cdot \overline{m-1}}$

III. $s = mt - \frac{m \cdot \overline{m-1}}{2} a$

IV. $m = \frac{1}{2} + \frac{t}{a} \pm \sqrt{\frac{t^2}{a^2} - \frac{2s+t}{a} + \frac{1}{4}}$

81. Combinando insieme queste formole si trovano quattro valori per ciascuna delle cinque lettere m, a, b, t, s

I. $m = 1 + \frac{t-b}{a} = \frac{2s}{b+t}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \frac{2s-b}{a} + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{t}{a} \pm \sqrt{\frac{t^2}{a^2} - \frac{2s+t}{a} + \frac{1}{4}}$$

II. $a = \frac{t-b}{m-1} = 2\,\frac{s - mb}{m \cdot \overline{m-1}}$

$$= \frac{t^2 - b^2}{2s - b - t} = 2\,\frac{mt - s}{m \cdot \overline{m-1}}$$

III. $b = t - (m-1)a = \frac{2s}{m} - t = \frac{1}{m} s - \frac{m-1}{2} a$

$$= \frac{1}{2} a \pm \sqrt{(t+a)t - (2s - \frac{1}{4} a) a}$$

O IV.

$$\text{IV.}\quad t = b + (m-1)a = \frac{2s}{m} - b = \frac{1}{m}s + \frac{m-1}{2}a$$

$$= -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(b+a)b + (2s + \frac{1}{4}a)a}$$

$$\text{V.}\quad s = \frac{m}{2}(b+t) = mb + \frac{m . \overline{m-1}}{2}a$$

$$= \frac{b-t}{2} + \frac{t^2 - b^2}{2a} = mt - \frac{m . \overline{m-1}}{2}a.$$

Paragone delle due progressioni, Geometrica, ed Aritmetica.

82. PAragonando insieme le formole dedotte dalle proprietà delle proporzioni, e progressioni geometriche, ed aritmetiche, si vede 1.º Che l'addizione, e la sottrazione nelle proporzioni, e progressioni aritmetiche, fanno ciò, che nelle proporzioni, e progressioni geometriche si ottiene colla multiplicazione, e colla divisione.

2.º Che nelle proporzioni, e progressioni aritmetiche si fa colla multiplicazione, e colla divisione ciocchè nelle proporzioni, e progressioni geometriche si fa colla formazione, e colla risoluzione delle potenze.

3.º Che la differenza, o la ragione comune de' termini d'una proporzione, e progressione aritmetica tiene luogo della ragione comune nella geometrica.

A cagione d'esempio, per trovare l'ultimo termine t d'una progressione aritmetica, dato il primo termine b, la differenza comune a, ed il numero m de' termini, si multiplica la differenza comune a col numero de' termini $m-1$, e si aggiunge al prodotto il primo termine b; e nella progressione geometrica, si ha il t alzando alla potenza $m-1$ la ragion comune a, e multiplicando a^{m-1} per il primo termine b.

83. Tutte

83. Tutte le proprietà delle proporzioni geometriche, ed aritmetiche ſi potevano dedurre dalla eſpreſſione de' conſeguenti per mezzo degli antecedenti, e della ragione comune fatta eguale ad a; invece di $a:b::c:d$, e di $a.b::e.d$ ſi poteva prendere $a:ab::c:ac$, e $b.b+a::c.c+a$; o, unendo in una queſte due eſpreſſioni, fare $b; b \overset{\times}{+} a::c; c \overset{\times}{+} a$. Non abbiamo ſcelta queſta ſtrada, che pure ſembra più ſemplice, per dare luogo agli artificj analitici, e l'accenniamo qui per dare materia di calcolo a chi vorrà contemplare la teoria delle proporzioni anche ſotto queſt' aſpetto.

84. Nelle progreſſioni. 1.° Non s'impiegano più di due lettere diverſe, b, a, varie volte a ſe ſteſſe aggiunte, o multiplicate inſieme; la progreſſione aritmetica ſi riduce ſempre a $b.b+a.b+2a.b+3a\ldots$ ec., e la geometrica a $b.ba.ba^2$ $ba^3\ldots$ ec.

2.° I coefficienti di a nella progreſſione aritmetica ſono gli ſteſſi, che gli eſponenti di a nella geometrica, termine per termine, ed oltre a ciò formano la ſerie naturale $1.2.3.4\ldots$ ec., o ſe ſi faccia il primo termine della progreſſione aritmetica eguale a $b+0a$, e della geometrica ba^0, formano la ſerie naturale $0.1.2.3.4\ldots$ ec.

3.° Quindi dato il primo termine b, e la ragione comune a delle due progreſſioni, ſi ha un facile compendio per formarle, e continuarle all' infinito. Per la progreſſione aritmetica baſta multiplicare la ragione, o differenza comune a ſucceſſivamente per i termini della ſerie naturale $0.1.2.3\ldots$ ec., ed a ciaſcun prodotto aggiungere il primo termine b. Per la progreſſione geometrica baſta alzare a ſucceſſivamente alle potenze eſpreſſe dalla ſerie naturale $0.1.2.3.4\ldots$ ec., e multiplicare di mano in mano queſte potenze per b.

4.° Nella progreſſione aritmetica, può ſupporſi b eguale a zero, non così nella geometrica; dacchè fatto $b=0$ in quella ſi avreb-

be tuttavia la progressione $\div$ 0 . a . 2a . 3a... ec., ed in questa si avrebbe una serie di zeri.

5.° Nella progressione aritmetica può supporsi $a = 1$, non così nella geometrica; e nè in quella, nè in questa può a essere eguale a zero. Se $a = 1$, si ha $\div b . b+1 . b+2$..... ec., se $a = 0$, si ha $b . b . b$... ec., che è una serie di quantità eguali; e nelle progressioni geometriche, se $a = 1$, si ha $b . b . b$... ec., serie di quantità eguali, e se $a = 0$, si ha una serie di zeri.

6.° Quindi la progressione aritmetica può avere qualche termine eguale a zero, non così la geometrica: nella progressione aritmetica allora solamente vi sarà un termine eguale a zero, quando uno de' termini sarà multiplo della ragione comune.

85. Infinite sono le osservazioni di simil genere, che si possono fare sulle due progressioni; tra tutte però, le più interessanti s'aggirano sulla progressione geometrica, in cui si supponga $b = 1$; si ha $\dot{\div}\, a^0 . a^1 . a^2 . a^3$ .... ec., che è la serie delle potenze di a. Su questa serie si noti. 1.° Che se preso a^0 per primo termine della progressione, il secondo non fosse a^1, ma $\frac{1}{a^1} = a^{-1}$, si avrebbe $\dot{\div}\, a^0 . a^{-1} . a^{-2} . a^{-3}$... ec.

2.° Che si possono ordinare queste due progressioni, di modo che ne compongano una sola; si avrà

$$\text{ec.} \ldots\ldots a^{-4} . a^{-3} . a^{-2} . a^{-1} . a^0 . a^1 . a^2 . a^3 . a^4 \ldots\ldots \text{ec.}$$

3.° Che in questa nuova progressione, il termine di mezzo a^0 è il limite comune donde partono le due progressioni, una verso la destra, l'altra verso la sinistra; la ragione d'un termine qualunque al suo vicino verso la destra è $\frac{1}{a}$, e gli esponenti partendo del limite comune formano la serie de' numeri naturali, ma andando verso la destra ciascun termine di questa serie ha il segno $+$, andando verso la sinistra, hanno il segno $-$.

4.° Che

4.° Che quindi la serie, che sta alla sinistra di a^0 è inversa di quella, che vi sta a destra: il secondo termine verso la destra dopo a^0 è a^1, ed il secondo termine dopo a^0 verso la sinistra è $a^{-1} = \frac{1}{a^1}$: il terzo termine ... ec.

86. Quindi. 1.° Nella progressione delle potenze di a d'esponente positivo la seconda potenza di a occupa il secondo sito, o la seconda classe dopo a^0; e generalmente, la potenza m^{esima} sta alla classe $(m+1)^{esima}$, incominciando da a^0; ed essendo il termine $(m+1)^{esimo}$ d'una progressione geometrica affatto lo stesso del $(m+1)^{esimo}$ continuamente proporzionale dopo il primo, ed il secondo termine, la potenza m di a è la $(m+1)^{esima}$ continuamente proporzionale all'unità, ed al dato a. Ciò vale ancora per le potenze d'esponente negativo.

2.° Collo stesso discorso si vede, che nella serie delle potenze di a, il termine a^1, che è radice seconda di a^2, è mezzano proporzionale tra a^0, ed a^2, e che generalmente a^1, che è radice m^{esima} di a^m, è la prima delle $m-1$ proporzionali tra a^0, ed a^m; cioè, che la radice qualunque d'una potenza d'esponente positivo è la prima di tante medie proporzionali tra l'unità, e la potenza data, quante sono unità (una meno) nell'esponente della radice cercata.

87. Quindi ancora; 1.° Cercare una potenza d'intero esponente dato di una data quantità a, è lo stesso, che supporre già formata una progressione geometrica, il primo termine della quale sia l'unità, ed il secondo sia la data quantità a, e cercare il termine di questa progressione, che occupa il sito indicato dall'esponente della potenza cercata, dopo l'unità non compresa; o, a dire più corto, cercare la potenza m d'una quantità a è lo stesso, che cercare la $(m+1)^{esima}$ continuamente proporzionale ad a^0, ed a.

2.° Cercare una radice d'esponente intero d'una data potenza,

è lo

è lo stesso, che supporre già formata una progressione geometrica, che incominci dall' unità, di cui sia dato un termine qualunque, ed il sito (indicato dall' esponente), che egli occupa nella medesima, e cercare il primo di tanti medj proporzionali tra l'unità, ed il dato termine, quante sono unità (meno una) nell' esponente dato; o, a dire più in breve, cercare la radice m d'una quantità a è lo stesso, che cercare il primo degli $(m-1)^{esimi}$ medj proporzionali tra a^0, ed a.

88. Quindi finalmente è manifesto, che tanto le radici delle potenze, quanto le potenze stesse d'una data radice sono termini della progressione delle potenze $\div\!\div\, a^0 . a^1 . a^2 . a^3 \ldots$ ec.; ciocchè dà una compiuta dichiarazione del chiamarsi dagli Analisti col nome di *potenze* anche le volgari radicali quantità.

89. Ciò dichiarasi viemmeglio dalla natura degli esponenti della progressione delle potenze. La diversità di due termini qualunque di questa progressione non istà, che negli esponenti diversi, da cui vengono affetti; sempre a entra ne' termini della progressione, ma sempre con nuovi, e tra se diversi esponenti, e per compire la progressione di due dati termini, o per introdurre tra due dati termini un numero m di medj proporzionali, basta cercare un numero m di medj aritmeticamente proporzionali tra gli esponenti de' medesimi, e mettergli di mano in mano per esponenti di a. Così per inferire un medio proporzionale tra a^0, ed a^2, si cerchi un medio aritmeticamente proporzionale r tra zero, e 2; si avrà $r = 1$, ed a^1 sarà il medio cercato; per inferire tre medj proporzionali tra a^0, ed a^1, si cerchino tre medj aritmeticamente proporzionali tra zero, e l'unità; si avrà $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, ed i medj cercati daranno

$a^0 . a^{\frac{1}{4}} . a^{\frac{1}{2}} . a^{\frac{3}{4}} . a^1$; e col metodo del num. 65., si avrà

$a^0 . \sqrt[4]{a} . \sqrt{a} . \sqrt[4]{a^3} . a^1$;

onde

onde $a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}$.

90. L'ultima, e la più insigne proprietà delle progressioni delle potenze è dedotta dalle proprietà delle progressioni aritmetiche, e geometriche, ed è, che la somma, o la differenza degli esponenti di due termini qualunque è l'esponente del prodotto, o del quoto de' medesimi, tra se multiplicati, o divisi. Questa è la proprietà principale de' *logaritmi*, che noi esporremo nel capo seguente, dopo d'avere sciolto il seguente problema.

91. Trovare la ragione, che ha la somma A d'una progressione geometrica, alla somma B d'una progressione aritmetica, posto, che amendue abbiano gl' istessi estremi b, t, e lo stesso numero di termini m.

Si riducano i due valori di A, B a non contenere, che le tre lettere b, t, m. Per la progressione aritmetica si ha (num. 81.) $B = \frac{m}{2}(b+t)$, e per la progressione geometrica si ha (num. 68.)

$$s = \frac{t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}}{t^{\frac{1}{m-1}} - b^{\frac{1}{m-1}}}$$

$$\text{e perciò } A : B :: \frac{t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}}{t^{\frac{1}{m-1}} - b^{\frac{1}{m-1}}} : \frac{m}{2}(b+t) ::$$

$$2\left(t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}\right) : m(b+t)\left(t^{\frac{1}{m-1}} - b^{\frac{1}{m-1}}\right) ::$$

$$2\left(t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}\right) : m\left(t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}}\right) + m\left(b\,t^{\frac{1}{m-1}} - t\,b^{\frac{1}{m-1}}\right);$$

e fatto

e fatto $t^{\frac{m}{m-1}} - b^{\frac{m}{m-1}} = p$, e $b\,t^{\frac{1}{m-1}} - t\,b^{\frac{1}{m-1}} = q$,

si ha $A : B :: 2p : mp + mq :: 2p : m(p+q)$

ossia, $A : B :: 2 \;:\; m + \frac{mq}{p}$.

92. Usando questo metodo non sarà necessario cercare separatamente le somme A, B per avere il loro rapporto, anzi non sarà necessario, che sia noto alcuno de' termini medj; dati i termini estremi, ed il numero de' termini si ha la ragione cercata, e finalmente trovata la ragione delle somme, e dato l'A, o il B, si ha il B, o l'A senza altri calcoli, fuori de' consueti per liberare un termine d'una data analogìa.

93. E' evidente. 1.° Che crescendo t per rapporto a b, m nell' analogìa superiore, cresce il p, e la seconda parte $t\,b^{\frac{1}{m-1}}$ di q; cioè si scema $\frac{mq}{p}$.

2.° Che crescendo il solo m, cresce $m + \frac{mq}{p}$.

3.° Che l'$m + \frac{mq}{p}$ si aumenta più col crescere di t, che col crescere di m.

4.° Quindi crescendo t, o m, si sminuisce il rapporto di A a B, o, che è lo stesso, cresce il rapporto di B ad A; ma questi rapporti sminuiscono, e crescono di più col crescere t, che coll' aumentarsi m.

94. Ciò si dichiarerebbe sempre più se prendessimo a considerare le trasformazioni della formola nel caso, in cui una delle t, b, m crescesse all' infinito per rapporto alle altre: queste considerazioni le può fare ognuno da se, essendo il calcolo delle quantità infinite affatto lo stesso del calcolo delle finite; noi

per

per *a*, *b*. . . ec. abbiamo ſempre inteſo d'eſprimere qualunque ſorta di quantità, o eſſe ſi ſuppongano finite, o comunque creſciute, o ſcemate all' infinito. Sulle proporzioni degli aſſolutamente infiniti, o infinitamente piccoli, o eſſi vi ſieno, o piuttoſto conducano ad aſſurdi, puoi vedere le ingegnoſe coſe, che ha ſcritte il Fontenelle (Elemens de la Geom. de l'Infini).

CAPO TERZO.

De' Logaritmi.

Natura, e proprietà de' Logaritmi.

95. TRovare l'esponente z della potenza, a cui alzando un numero qualunque a, preso ad arbitrio, si abbia un numero eguale ad un dato y.

A questo problema io riduco con Eulero (Tom. 1. c. 6. dell' introduzione all' Analisi degli infiniti) tutta la teorìa de' logaritmi; l'esponente indeterminato z si chiama logaritmo del numero dato y, ed il numero assunto a si chiama *base logaritmica*. Questo problema si scioglie col metodo delle medie, e continuamente proporzionali.

96. In tanto si vede dall' equazione fondamentale $a^z = y$, che disegnando colla lettera l il logaritmo di un dato numero y, si ha 1.° $ly = z$, ed alzando ciascun membro della prima equazione alla potenza d'esponente n, e $-n$ qualunque, si ha

$$a^{nz} = y^n$$
$$a^{-nz} = y^{-n}$$
$$\text{donde } ly^n = nz$$
$$ly^{-n} = -nz$$

2.° Se $lv = x$...... sarà $a^x = v$

$ly = z$ $\qquad$ $a^z = y$, e multiplicando insieme queste due equazioni, si ha $a^{x+z} = vy$, donde $lvy = x + z = lv + ly$, e dividendo una di quelle medesime equazioni per l'altra, si ha $a^{x-z} = \frac{v}{y}$, donde $l\frac{v}{y} = x - z$,

cioè $l\frac{v}{y} = lv - ly$

3.° Fi-

3.° Finalmente, se $y=1$, sarà $a^z=1$, cioè $z=0$, e $l\,1=0$.

97. Quindi rappresentandosi coll' y qualunque numero, 1.° non può a essere eguale, o minore dell' unità, dacchè se esso è un' unità, non potrà mai, qualunque sia l'esponente z, aversi un numero maggiore d'un' unità, e se è una frazione, fuori del caso di $z=0$, sarà sempre a^z minore dell' unità.

2.° I logaritmi negativi sono logaritmi delle frazioni; i logaritmi positivi sono logaritmi de' numeri interi.

3.° Non si possono avere logaritmi esatti, se non quando y è una potenza perfetta di a; gli altri si hanno per approssimazione.

4.° Come si possono assegnare infiniti valori ad a maggiori dell' unità, infiniti altresì possono essere i sistemi de' logaritmi, dipendenti tutti dalle diverse supposizioni del valore di a.

5.° Quel numero, il cui logaritmo è l'unità, serve sempre di base a qualunque sistema; dacchè, se $z=1$, deve necessariamente essere $a=y$.

6.° Se quattro termini sono in proporzione geometrica, i loro logaritmi sono in proporzione aritmetica, e se una serie di termini è in progressione geometrica, i loro logaritmi sono in progressione aritmetica; dacchè i logaritmi sono esponenti delle potenze di a, o delle radici di y.

98. Da quest' ultima proprietà de' logaritmi hanno tratta alcuni Autori la deffinizione de' medesimi, dicendo, che i logaritmi sono termini d'una progressione aritmetica, che corrispondono a' termini d'una geometrica progressione. Questa nozione prende i logaritmi in una significazione più astratta, e più generale; ma per l'uso non è uopo di tanto.

99. Si considerino le formole del num. 96.. In qualunque sistema de' nostri logaritmi; 1.° $l\,vy=lv+ly$. Con questa formola si cambiano tutte le multiplicazioni in semplici addizioni: *Il prodotto di due numeri è il numero, che corrisponde nelle tavole alla somma de' loro logaritmi.*

 2.°

2.° $l\frac{v}{y}=lv-ly$. Con questa formola si cambiano tutte le divisioni in semplici sottrazioni: *Il quoto di due numeri è il numero, che corrisponde nelle tavole al logaritmo del dividendo sminuito del logaritmo del divisore.*

3.° $ly^{\pm n}=\pm nz$, ossia $ly^{\pm n}=\pm nly$, per essere $z=ly$. Con questa formola si cambiano le formazioni di tutte le potenze d'esponente positivo, o negativo, alle volte di numeri assai composti, in semplici multiplicazioni di numeri piccoli: *La potenza d'esponente dato di un dato numero, è il numero, che corrisponde nelle tavole al logaritmo del dato numero, ma multiplicato per l'esponente dato.*

4.° $ly^{\pm\frac{1}{s}}=\pm\frac{1}{s}z=\pm\frac{1}{s}ly$ Con questa formola si cambiano l'estrazioni delle radici in semplicissime divisioni: *La radice d'esponente dato d'un dato numero, è il numero, che corrisponde nelle tavole al logaritmo del dato numero, ma diviso per l'esponente dato.*

5.° L'uso di queste quattro formole farà comprendere varj compendj nel calcolo; a cagione d'esempio, per multiplicare un numero intero per una frazione propria, non è necessario cercare prima il logaritmo della frazione, per aggiungerlo al logaritmo del numero intero; basta sottrarre il logaritmo del denominatore della frazione dalla somma de' logaritmi dell' intero, e del numeratore dato; si schiva con ciò una sottrazione, che sempre riesce più difficile dell' addizione; così per dividere un numero intero per una frazione, basta sottrarre il logaritmo del dato numeratore, dalla somma de' logaritmi dell' intero, e del denominatore dato; e così nel resto.

Sarà ora facile il mettere in teoremi le altre formole sui logaritmi, che noi anderemo svolgendo in questo capo.

Me-

Metodi, e compendj di metodi per costruire le tavole de' Logaritmi.

100. **D**Ato B per valore della base a, trovare il logaritmo d'un numero qualunque Z.

Sia $Z=5$, e nell'equazione $a^x=y$ sia $y=1$, ed $y=10$; fatto

$A=1$, sarà $lA=0$

$B=10$ $\quad lB=1$

cioè Z sta tra A, B. Si cerchi un medio geometricamente proporzionale tra A, B; si avrà $C=\sqrt{AB}$; cioè C eguale a 10 alzato alla potenza, che ha per esponente un medio aritmeticamente proporzionale tra zero, e l'unità: Per evitare le frazioni in questa, ed in simili determinazioni, si metta dopo i termini A, B, ed lA, lB un egual numero di zeri, per esempio sei, o sette; sarà

$A=1$, 000000..... $lA=0$, 0000000

$B=10$, 000000..... $lB=1$, 0000000

$C=3$, 162277..... $lC=0$, 5000000

Il C trovato non è eguale a Z, e sta Z tra C, B. Si determini allo stesso modo un medio geometricamente proporzionale tra C, B; si avrà $D=\sqrt{BC}$, cioè 10 alzato ad una potenza, che ha per esponente un medio aritmetico tra lB, e lC....., e così si proceda successivamente, come nello schemma seguente, finoacchè uno de' medj proporzionali sia Z.

$A = 1\ ,\ 000000$	$lA = 0,\ 0000000$	
$B = 10,\ 000000$	$lB = 1,\ 0000000$	Sia
$C = 3\ ,\ 162277$	$lC = 0,\ 5000000$	$C = \sqrt{AB}$
$D = 5\ ,\ 623413$	$lD = 0,\ 7500000$	$D = \sqrt{BC}$
$E = 4\ ,\ 216964$	$lE = 0,\ 6250000$	$E = \sqrt{CD}$
$F = 4\ ,\ 869674$	$lF = 0,\ 6875000$	$F = \sqrt{DE}$
$G = 5\ ,\ 232991$	$lG = 0,\ 7187500$	$G = \sqrt{DF}$
$H = 5\ ,\ 048065$	$lH = 0,\ 7031250$	$H = \sqrt{FG}$
$I = 4\ ,\ 958069$	$lI = 0,\ 6953125$	$I = \sqrt{FH}$
$K = 5\ ,\ 002865$	$lK = 0,\ 6992187$	$K = \sqrt{HI}$
$L = 4\ ,\ 980416$	$lL = 0,\ 6972656$	$L = \sqrt{IK}$
$M = 4\ ,\ 991627$	$lM = 0,\ 6982421$	$M = \sqrt{KL}$
$N = 4\ ,\ 997242$	$lN = 0,\ 6987304$	$N = \sqrt{KM}$
$O = 5\ ,\ 000052$	$lO = 0,\ 6989745$	$O = \sqrt{KN}$
$P = 4\ ,\ 998647$	$lP = 0,$ 698[illegible]525	$P = \sqrt{NO}$
$Q = 4\ ,\ 999350$	$lQ = 0,\ 6989135$	$Q = \sqrt{OP}$
$R = 4\ ,\ 999701$	$lR = 0,$ 6989[illegible]40	$R = \sqrt{OQ}$
$S = 4\ ,\ 999876$	$lS = 0,\ 6989592$	$S = \sqrt{OR}$
$T = 4\ ,\ 999963$	$lT = 0,\ 6989668$	$T = \sqrt{OS}$
$V = 5\ ,\ 000008$	$lV = 0,\ 6989707$	$V = \sqrt{OT}$
$W = 4\ ,\ 999984$	$lW = 0,\ 6989687$	$W = \sqrt{TV}$
$X = 4\ ,\ 999997$	$lX = 0,\ 6989597$	$X = \sqrt{WV}$
$Y = 5\ ,\ 000003$	$lY = 0,\ 6989702$	$Y = \sqrt{VX}$
$Z = 5\ ,\ 000000$	$lZ = 0,\ 6989700$	$Z = \sqrt{XY}$

Si ha dunque $l5 = 0,\ 69897$, cioè $10^{0,\ 69897} = 5$.
Allo ſteſſo modo ſi poſſono trovare i logaritmi degli altri numeri per qualunque baſe logaritmica *a*. Le tavole di Briggio, e di

e di Ulacquio sono calcolate sulla base 10, e sono oramai le più note, e comuni.

101. Sarebbe intollerabile la noja del calcolo, se si dovessero cercare immediatamente col metodo spiegato i logaritmi di tutti i numeri naturali. Quattro sono gli artificj più comuni per abbreviarne il lavoro;

1.° Di cercare col precedente metodo solamente i logaritmi de' numeri primi, e colle multiplicazioni di questi logaritmi, per 2, per 3...., per n si avranno i logaritmi delle loro potenze seconde, terze..., n^{esime}.

2.° Di cercare, coll' addizione de' logaritmi de' numeri primi, i logaritmi de' loro composti.

3.° Di cercare, coll' addizione, o sottrazione de' logaritmi di certi altri numeri non primi, i logaritmi de' loro multipli, o summultipli.

4.° Di cercare, co' logaritmi di varj numeri, posti ad eguale intervallo nella serie naturale, i logaritmi de' numeri intermedj. I primi tre compendj sono per se chiari dalle formole dell' articolo precedente: Aggiungendo al logaritmo di 10 quello di $\frac{9}{10}$, si ha il doppio logaritmo di 3: Sottraendo il logaritmo di 2 dal logaritmo di 10, si ha il logaritmo di 5... ec. Il quarto compendio dipende dal metodo delle interpolazioni, che noi spiegheremo nel secondo libro.

102. Questi, ed altri compendj per formare le tavole de' logaritmi, si applicano facilmente ad altri metodi più universali, presi da principj più elevati del calcolo. Eulero nell' introduzione citata al num. 94., Reyneau nel secondo tomo dell' Analisi dimostrata, ed altri, mostrano in generale, che il logaritmo del numero $1+x$, che rappresenta qualunque numero maggiore, o minore dell' unità, è eguale ad $\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\ldots \text{ec.}\right)$, ed il valore

di

di k dipende dalla base a fatta eguale ad $1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \ldots$ ec.

103. Tra tutti i sistemi de' logaritmi, due sono i più conosciuti; quello della base $a = 10$, che dà i logaritmi chiamati *volgari*, e quello della base

$$a = 2,7182818284590452353 6028 \ldots \text{ ec.},$$

che dà i logaritmi chiamati *iperbolici* dall' esprimersi, che si fa con essi nella geometria sublime, la quadratura dell' iperbola. Nel sistema volgare, il logaritmo di 10 è l'unità, come al num. 100., e nel sistema iperbolico il logaritmo di 10, è

$$2,302585092994045684017991 4 \ldots \text{ ec.}$$

Di questi logaritmi di 10 si farà uso nell' articolo seguente.

104. Intanto si noti, che i logaritmi della base 10 oltre le utilità generali di tutti i logaritmi di basi diverse, hanno le proprie, e particolari, per cui vengono a preferenza d'ogni altro sistema usati ne' calcoli. Qualunque sistema di logaritmi dà i logaritmi de' numeri naturali (e conseguentemente d'ogni altro numero), composti d'un numero intero chiamato *caratteristica*, e d'una frazione decimale, chiamata da Eulero, e da altri *mantissa*. Ora, i logaritmi de' numeri naturali, tra 1, e 10, stanno nel sistema di $a = 10$, tra lo zero, e l'unità; i logarirmi de' numeri tra 10, e 100, stanno tra 1, e 2, e così nel resto. Onde; 1.° Dato il logaritmo volgare d'un numero, si conosce dalla semplice caratteristica di quante figure (intere) debba essere composto il numero, che gli corrisponde, e dal numero dato si conosce la caratteristica del suo logaritmo; dacchè *la caratteristica del logaritmo volgare è composta di tante unità una meno*, *quante sono le figure* (intere) *nel dato numero*.

2.° Aumentando di n unità la caratteristica d'un logaritmo, si ha il logaritmo del n^{cuplo} del numero medesimo. Queste due pro-

proprietà, che portano una facilità sorprendente ai calcoli, non sono comuni ai logaritmi di base diversa dai volgari.

Riduzione d'un dato Sistema di Logaritmi a qualunque altro Sistema cercato.

105. NOi non abbiamo per le mani, che i logaritmi costruiti sulla base 10; eppure assai volte, o è utile, o è necessario d'avere i logaritmi costruiti su qualche base diversa. Una generale proprietà de' logaritmi di qualunque sistema ci mette a stato di supplire ad ogni bisogno colle sole tavole comuni: Essa è, che i logaritmi di due numeri di un sistema sono in proporzione geometrica coi logaritmi de' due medesimi numeri dedotti da un altro sistema.
Siano m, n i logaritmi di due numeri A, A' formati colla base a; si avrà $A = a^m$, $A' = a^n$, ed alzando la prima equazione alla potenza n, e la seconda alla potenza m, sarà $A^n = a^{mn}$, $A'^m = a^{mn}$, cioè $A^n = A'^m$, ossia $A = A'^{\frac{m}{n}}$; Allo stesso modo, dati i logaritmi m', n' de' due medesimi numeri in un altro sistema di base a', sarà $A = A'^{\frac{m'}{n'}}$; dunque $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$.

106. Quindi; 1.° $n' = \frac{m'}{m} \cdot n$. Cioè, se m è il logaritmo d'un numero A' nel sistema comune, ed m' il logaritmo del medesimo numero in qualunque altro sistema, si avrà il logaritmo n' d'un altro qualunque numero A in questo sistema medesimo. A cagione d'esempio, il logaritmo comune m di $A' = 10$ è l'unità, ed il logaritmo iperbolico di 10 è 2, 3025 ... ec. $= m'$; sarà $\frac{m'}{m} = \frac{2,\ 3025 \ldots \text{ec.}}{1}$; donde, chiamando L il logaritmo iperbolico di A, sarà $LA = lA \times 2,\ 3025 \ldots$ ec.

107. 2.° $n = \frac{m}{m'} . n'$. Cioè, se invece de' logaritmi comuni avessimo le tavole de' logaritmi d'un altro sistema, sarebbe ancora facile il trovare i logaritmi comuni de' numeri. A cagione d'esempio, il logaritmo comune m di 10 è l'unità, ed il logaritmo iperbolico m' di 10 è 2, 3025... ec.;

sarà $\frac{m}{m'} = 0,\ 43429448190032518 27\ldots$ ec.;

donde $lA = LA \times 0,\ 434294\ldots$ ec.

Uso delle tavole de' Logaritmi comuni.

108. **T**Rovare per mezzo delle tavole il logaritmo, che corrisponde ad un dato numero A.
In questo problema non si trova difficoltà alcuna, fuorchè nel caso, in cui A sia un numero misto d'una parte intera, e d'una frazione, o volgare, o decimale, oppure sia A un numero intero maggiore del massimo delle tavole, o finalmente sia una semplice frazione decimale.
Egli è evidente, che i logaritmi de' numeri interi minori del massimo delle tavole si leggono in tutte le tavole immediatamente scritti accanto al dato numero, e che il logaritmo d'una frazione $\frac{v}{y}$ è $lv - ly$. Spiegheremo qui le formole per que' tre primi casi, e soggiungeremo in seguito i compendj, e le avvertenze necessarie per usarle con facilità.

109. Se il dato numero A è misto d'una parte intera B, e d'una frazione C; si cerchi immediatamente dalle tavole lB, e $l(B+1)$, e sia $l(B+1) - lB = D$; facendo $1 : C :: D : s$, sarà $lA = lB + s$.

110. Se il dato numero A è un numero intero maggiore del massimo delle tavole; si divida A per un numero t tale,

che

che nel quoziente $B+C$ resti la parte intera B composta di tante figure, una meno, quante sono nel massimo numero delle tavole; sarà $\frac{A}{t}=B+C$, si cerchi (num. 109.) il logaritmo di $B+C$; sarà $l(B+C)=l\frac{A}{t}=lA-lt$; donde $lA=(lB+C)+lt$.

111. Se il dato numero A è una semplice frazione decimale, si multiplichi A per un numero t tale, che il prodotto B sia un numero intero; sarà $B=At$, ed $lB=lAt=lA+lt$; donde $lA=lB-lt$.

112. Ecco alcuni compendj. Nel primo problema; 1.° Se sia C una frazione volgare rappresentata da $\frac{E}{F}$, si avrà A $=\frac{BF+E}{F}$, e $lA=l(BF+E)-lF$; giova questo compendio, massimamente quando $BF+E$ non è un numero maggiore del massimo delle tavole.

2.° Se la frazione C sia una semplice frazione decimale di r figure, avendone n l'intero B, ed $n+r$ non sia numero maggiore del numero m di zeri, che ha il massimo delle tavole, basterà considerare $B+C$ come un numero intero, e sarà $(10)^r$ $A=B+C$, e trovato il logaritmo di $B+C$ immediatamente dalle tavole, sarà $l(B+C)=l(10)^r A=lA+l(10)^r$; donde $lA=l(B+C)-r$, 000... ec.

3.° Se $n+r>m$, si piglino le prime figure m, come se esprimessero un intero B, ed il residuo fosse un rotto decimale C; trovato col metodo del num. 109. il $l(B+C)$, sarà $lA=(lB+C)-(m-n)$, 000... ec.

4.° Si noti, che il precedente compendio avrà uso ancor quando sia A un semplice decimale, ed $r>m$, basta fare nella formola precedente $n=0$, e sarà $lA=l(B+C)-m$, 0000... ec.

113. Siccome la multiplicazione, o divisione d'un numero

per un termine della ſerie decadica 10.100.1000... ec. ſi fa facilmente, o coll' aggiungere al dato numero verſo la deſtra de' zeri, o colla virgola ſeparatrice de' decimali, ſarà meglio, nel problema ſecondo, e terzo, prendere per t un termine della ſerie medeſima. Così al num. 110. ſia 1 con m zeri il maſſimo numero delle tavole, ed il numero dato A abbia figure $m+r$; ſi chiami B l'intero eſpreſſo dalle ſole figure prime m (cioè preſe da ſiniſtra a deſtra), ed il reſto conſiderato come decimale ſi chiami C; ſarà $\frac{A}{(10)^r}=B+C$, e trovato (num. 109.) il logaritmo di $B+C$, ſarà $l(B+C)=l\frac{A}{(10)^r}=lA-l(10)^r$, donde $lA=l(B+C)+r$, 000... ec. Ed al num. 111., ſia r il numero delle figure, che vengono dopo la virgola nel decimale A, e ſia l'intero $B=(10)^r A$; ſarà $lB=lA+l(10)^r$; onde $lA=lB-r$, 0000... ec.

114. Avvertenze. 1.° Il logaritmo trovato al num. 109. non è del tutto eſatto, ma ſolo proſſimamente: Il metodo ſuppone le differenze de' numeri proporzionali alle differenze de' loro logaritmi, ciocchè non è vero parlando per ſe; per avere i medj geometrici, non baſta il prendere gli aritmetici.

2.° Le differenze de' logaritmi tanto ſono più proſſimamente proporzionali alle differenze de' numeri, quanto i numeri ſono più grandi, e ſi diſcoſtano enormemente dalla proporzionalità ne' numeri molto piccoli, come di una, ed anche di due figure. Ciò ſi può dimoſtrare *a priori*, ma ſi vedrà facilmente dalle tavole: Se ſi prendano nelle tavole comuni i $l(A+2)-l(A+1)$, e $l(A+1)-lA$, non ſi troveranno mai eguali queſte differenze, ma eſſe ſi ſcoſteranno poco dall' uguaglianza, ſe A ſi piglj verſo il fine delle tavole, e ſaranno molto diſuguali tra ſe, ſe ſi piglino verſo al principio.

3.° Quindi nel caſo del num. 109. ſe B foſſe un numero troppo

troppo piccolo, converrebbe ridurre la frazione volgare C in decimali, e servirsi d'uno de' compendj posti al num. 113., ma basterà pigliare un numero $2m-n$ di figure decimali.

4.° In generale però si può vedere con facilità fino a quali figure di decimali debba essere esatto il logaritmo, che si trova col metodo del num. 109. si esamini fino a quali figure di decimali sia $l(B+1)-lB$ eguale a $l(B+2)-l(B+1)$, e fino alle stesse sarà sicuramente esatto l's del num. 109.; lo sarà fors'anche fino all' immediata seguente, essendo più proporzionali le differenze tra $l(B+1)$, e lB, che tra $l(B+2)$, e lo stesso lB; le inferiori figure per l'ordinario verranno erronee.

115. Trovare per mezzo delle tavole il numero, che corrisponde ad un dato logaritmo comune. Anche in questo secondo problema tre soli sono i casi, che seco portano qualche difficoltà: Quando il dato logaritmo è minore del massimo logaritmo delle tavole: Quando il dato logaritmo è maggiore del logaritmo massimo delle tavole: Quando il dato logaritmo è negativo. E' evidente, che se il dato logaritmo si trova esatto nelle tavole, vi starà scritto accanto il numero, che vi corrisponde.

116. Se il dato logaritmo lA è minore del massimo delle tavole. Sia lB il logaritmo prossimamente minore di lA, sarà $l(B+1)$ il logaritmo prossimamente maggiore, si faccia

$$l(B+1)-lB:1::lA-lB:\frac{lA-lB}{l(B+1)-lB}=s;$$

sarà $A=B+s$.

117. Se lA è maggiore del massimo logaritmo delle tavole. Sia $m+1$ la caratteristica del massimo logaritmo delle tavole, ed $m+n$ la caratteristica di lA; si faccia

$$lA-n,0000\ldots \text{ec.}=l\frac{A}{(10)^n}=lB;$$

sarà $A=(10)^n B$.

118. Se

118. Se lA è negativo. Sia $n-m$ la caratteriſtica di lA; ſi faccia $lA+(m+n)$, 000 ... ec. $=l(10)^{m+n}A=lB$;

ſarà $A=\frac{1}{(10)^{m+n}}B$.

119. Queſte formole ſi deducono da' medeſimi principj, da' quali ſi ſono dedotte quelle del problema precedente, ed hanno de' compendj analoghi, e delle ſimili avvertenze.

Nel primo problema; 1.º Se la caratteriſtica è troppo piccola, conviene, per evitare gli errori, accreſcerla quanto ſi può: Sia $m+1$ la caratteriſtica maſſima delle tavole, ed $m-n$ la caratteriſtica del dato logaritmo: Si trovi il numero corriſpondente alla caratteriſtica m unita alla data mantiſſa, riducendo la frazione in decimali, e ſi traſporti la virgola diviſoria da deſtra a ſiniſtra per figure n, coſicchè ſiano $m-n$ figure negli interi.

2.º La frazione s ſi dovrà ſempre ridurre in decimali, e di queſti baſterà trovarne tante figure, che tra interi, ed eſſi vi ſia un numero $2m$ di figure; il reſto non ſarebbe eſatto.

3.º Speſſo non ſarà biſogno di tener conto della frazione, principalmente quando la caratteriſtica foſſe zero, oppure 1, ed inſieme baſtaſſe di avere il numero cercato in tre, o due decimali; ſi cerchi al fine delle tavole comuni il numero corriſpondente alla data mantiſſa, e ſi prendano una, o due delle quattro figure, che formano il numero corriſpondente, per interi, e le altre per decimali.

120. Nel ſecondo problema; 1.º Se foſſe $n>m$, baſterà ſvolgere la frazione, che ſta in B in decimali, finchè vi ſieno figure in tutto $2m$; a. queſto B ſi aggiungano verſo la deſtra tanti zeri fino a compire un numero di figure $m+n+1$.

2.º Si potrebbe dividere il dato logaritmo in due, o più, tali, che tutti ſi trovino nelle tavole, e prendere il prodotto de' loro numeri; ma queſto metodo ſarà il più delle volte, o difficile aſſai, o fatto all' azzardo.

121. Nel

121. Nel problema terzo: 1.° Si può considerare lo lA come positivo, e trovato il numero A, che vi corrisponde, sarà $\frac{1}{A}$ il numero cercato.

2.° Se cercando la frazione $\frac{E}{F}$, che corrisponde ad un logaritmo negativo lA, si voglia, che il denominatore F, o il numeratore E sia un numero dato, sarà nel primo caso $lE = lF + lA$, e nel secondo sarà $lF = lE - lA$.

3.° Se nella formola del num. 119. fosse $m = 0$, come spesso accade ne' calcoli ordinarj, la formola sarebbe più semplice, cioè $A = \frac{1}{(10)^n} B$; ed allora per n basterebbe prendere il logaritmo 4 del massimo numero 10000 delle tavole comuni.

Metodo per evitare i Logaritmi negativi.

122. IN qualunque sistema de' logaritmi, il logaritmo delle frazioni proprie è negativo, per essere, come s'è dimostrato, il logaritmo dell' unità eguale a zero. Sanno i soli calcolatori di tavole astronomiche, e quegli, che maneggiano per mezzo de' logaritmi i problemi trigonometrici quanto grande imbarazzo s'introduca ne' calcoli un po' prolissi da questi logaritmi delle frazioni, onde ben a proposito s'è pensato ad un metodo facile, e sicuro per evitargli. Tutto il metodo è fondato sulla seguente proposizione:

Si può supporre, che il logaritmo dell' unità sia $(10)^n$; e tutti i logaritmi *ideali*, che in questa supposizione si dedurranno dal calcolo per le frazioni, corrisponderanno a frazioni decimali, che avranno verso la sinistra tanti zero meno uno, quante sono le unità, che mancano alla caratteristica per compire l'assunto termine decadico: Un' occhiata alla seguente tavola.

Nu-

Numeri Naturali.	Logaritmi Volgari.	Logaritmi Ideali.	
10000	+ 4, 0000000	14, 0000000	104, 0000000
1000	+ 3, 0000000	13, 0000000	103, 0000000
100	+ 2, 0000000	12, 0000000	102, 0000000
10	+ 1, 0000000	11, 0000000	101, 0000000
1	0, 0000000	10, 0000000	100, 0000000
0, 1	− 1, 0000000	9, 0000000	99, 0000000
0, 01	− 2, 0000000	8, 0000000	98, 0000000
0, 001 ...	− 3, 0000000	7, 0000000	97, 0000000
0, 0001 ..	− 4, 0000000	6, 0000000	96, 0000000
.... ec.			

123. Sembra, che si cambj con questa supposizione tutta la teorìa de' logaritmi; dacchè fatto $y = 1$, non è più $a^{(10)^n}$ eguale all' unità; ma, a vero dire, non si porta con ciò alcuno sconcerto nelle tavole logaritmiche. Fatta che sia comune a tutti i logaritmi questa supposizione, si cambieranno tutti nella ragione stessa, o, che è lo stesso, le variazioni saranno relativamente tutte eguali. Se si aggiungano a tutte le caratteristiche de' logaritmi n unità, si multiplicano i numeri corrispondenti per $(10)^n$, ma, e questi, e quegli mantengono sempre la stessa ragione tra se, che avevan prima. In una parola, l'artificio presente si riduce al compendio terzo del num. 119., ed equivale all' uso delle tavole, che incominciano non dal zero, ma da $(10)^n$.

124. Ciò supposto: Sia $(10)^n$ il logaritmo dell' unità, e sia L la lettera, che indica il logaritmo ideale d'un numero qualunque A; si disegni, come prima, per l il logaritmo comune del medesimo A, e per q la mantissa di A.

Si avrà $LA = (10)^n + lA$

quindi $LA^m = (10)^n + lA^m = (10)^n + mlA$

$$LA^{\frac{1}{m}} = (10)^n + lA^{\frac{1}{m}} = (10)^n + \frac{1}{m}lA.$$

125. E'

125. E' evidente: 1.° Che per avere il logaritmo ideale di qualunque numero A, e di qualunque sua potenza, o radice, di cui sia dato il logaritmo comune, basta aggiungere $(10)^n$ al dato logaritmo comune del medesimo, o, che è lo stesso, basta sostituire nelle precedenti tre formole *ecumeniche* il valore di lA, mlA, $\frac{1}{m}lA$.

2.° Che per avere il logaritmo comune di un numero A, e di qualunque sua potenza, o radice, di cui sia dato il logaritmo ideale, basta sottrarre $(10)^n$ dal dato logaritmo ideale, ossia trasporre nelle precedenti tre formole ecumeniche il termine $(10)^n$, e sostituirvi il valore di LA, LA^m, $LA^{\frac{1}{m}}$.

126. Nei calcoli ordinarj della trigonometrìa, e dall' astronomìa, è sufficiente il supporre $n = 1$. Si dinoti adunque con l' il *complemento aritmetico* d'un dato logaritmo comune, cioè la differenza del dato logaritmo da 10, e facendo nelle predette formole le sostituzioni di lA, preso dagli articoli precedenti, si avrà

Per la prima Formola Ecumenica

$$LA = (10)^n + lA$$

I. Se A è un numero intero di r figure,

sarà $LA = 9 + r + qA$

II. Se A è una frazione decimale; chiamando D le figure significative del medesimo, prese per intere, ed r il numero totale delle figure tra zeri, ed interi, che vengono dopo la virgola;

sarà $LA = (10 - r) + lD$

III. Se A è una frazione $\frac{B}{C}$, comunque B, o C, o amendue siano numeri interi, o decimali;

sarà $LA = lB + l'C$

IV. Se A è una frazione $\frac{1}{C}$, comunque C sia intero, o decimale;

fará $L\,A = l'C$

Per la seconda Formola Ecumenica

$$L\,A^m = (10)^n + m\,l\,A$$

V. Se A è un numero intero di r figure;

sarà $L\,A^m = 10 + m\,(r - 1) + m\,q\,A$

VI. Se A è una frazione decimale di r figure dopo la virgola, contando anche le significative D;

sarà $L\,A^m = 10 - m\,r + m\,l\,D$

VII. Se A è una frazione $\frac{B}{C}$, comunque B, o C, o amendue siano numeri interi, o decimali;

sarà $L\,A^m = 10\,(1 - m) + m\,(l\,B + l'C)$

VIII. Se A è una frazione $\frac{1}{C}$, comunque C sia intero, o decimale;

sarà $L\,A^m = 10\,(1 - m) + m\,l'\,C$

Per la terza Formola Ecumenica

$$L\,A^{\frac{1}{m}} = (10)^n + \frac{1}{m}\,l\,A$$

Basta sostituire nelle quattro formole dedotte dalla seconda Ecumenica il numero $\frac{1}{m}$ invece di m.

127. Colla trasposizione del num. 125. si può avere il numero, che corrisponde ad un logaritmo ideale; ma v'ha per ciò un' altra strada più corta, e più semplice. Si trovino sul fine delle tavole le figure corrispondenti alla mantissa del dato logaritmo ideale, e chiamando t la caratteristica del medesimo loga-

garitmo; 1.° Se $t = 9$, tutte le figure trovate si mettano immediatamente dopo la virgola decimale.

2.° Se $t > 9$, si metta la virgola decimale dopo $t - 9$ figure prese da sinistra verso la destra.

3.° Se $t < 9$, si metta dopo la virgola, ed alla sinistra delle figure trovate, un numero $9 - t$ di zeri. Tutto è evidente dall' essere nel primo caso $9 - 10 = - 1$, che per il num. 103. ci fa riporre subito dopo la virgola le figure corrispondenti alla mantissa del logaritmo, che ha $- 1$ per caratteristica.

128. Il frequente uso delle precedenti formole suggerirà ne' casi particolari certi compendj, che infinita, e nojosa cosa sarebbe il riferirgli qui minutamente. Ne accenno due soli.

1.° Se nel cercare il logaritmo ideale di $\frac{B}{C}$, quando B, e C sono frazioni decimali, si usi la formola III., si dovranno fare tre sottrazioni; si avrà con compendio di calcolo il logaritmo cercato, se si sottragga il LC da LB, aggiungendo se fa bisogno tante diecine alla caratteristica di LB, quante se ne richieggono per potervi, dopo la sottrazione delle altre figure, sottrarre ancora la caratteristica di LC dalla caratteristica di LB.

2.° Trovandosi facilmente col metodo precedente il $L\frac{B}{C}$, quando siano B, C numeri decimali, la formola VII., per avere il logaritmo ideale della potenza m di $\frac{B}{C}$ si riduce a sottrarre da $mL\frac{B}{C}$, o dalla sua caratteristica, il numero $10(m - 1)$, e conseguentemente per avere il logaritmo ideale della radice m di $\frac{B}{C}$, basta aggiungere a $L\frac{B}{C}$, o alla sua caratteristica, il numero $10(m - 1)$, e dividere per m tutta la somma.

129. Par-

129. Parmi, che coi cinque articoli, ne' quali è ſuddiviſo il preſente capo reſti dedotta, non ſenza qualche particolare eleganza, da' ſuoi più ſodi, e più univerſali principj tutta la teorìa de' logaritmi: Principalmente in queſt' ultimo articolo mi ſono ſtudiato di trattare ampiamente la teorìa de' logaritmi negativi. Eſſa è ſtata introdotta da pochi anni in quà, ma neſſuno, ch' io ſappia, s'è finora preſa la pena di ridurla a metodo, ed a formole facili (*) all' uſo. Unicamente ho letto ſu queſta materia il Sig. De La Lande, che al libro venteſimo quarto della ſua Aſtronomìa, ſtende la pura pratica di queſto calcolo *per le frazioni decimali*; e l'Abbate La Caille, che al num. 344... ec. de' ſuoi Elementi d'algebra inſegna l'uſo delle tavole logaritmiche formate ſull' ipoteſi di $l\,1 = 10$ *per le frazioni volgari, e decimali*. LI-

(*) *La Teorìa de' logaritmi negativi è una parte delle Matematiche Elementari la più intereſſante per tutti i Calcolatori: converrebbe però* (dicono alcuni) *che ſi rendeſſe più piana, ed addattata alla pratica, ſpogliandola, per quanto ſi può, da quel ſerioſo, e per alcuni aſpro corredo delle formole algebraiche*. Io veramente mi ſono fermato ſoltanto a ſviluppare i principj generali ſui quali eſſa s'appoggia, ed a dedurne le formole aſtratte per tutto il calcolo: Ciò ſolo portava l'uniformità del metodo, che regna in tutta queſta, qualunque ſiaſi, operetta: Lo ſvolgere eſattamente tutte le formole in teoremi, ed il fare certe particolari riflesſioni eſemplificate con eſempj a ſcioglimento di quelle difficoltà, che s'incontrano nella loro applicazione, l'ho laſciato qui, e dappertutto altrove, all' induſtria, ed al privato ſtudio del leggitore. Come però ſono convinto della neceſſità di far bene a tutti comprendere il calcolo de' logaritmi negativi, mi ſono determinato ad inſerire al fine del ſecondo mio libro una Memoria, ultimamente compoſta, ed ancora inedita, ſu queſta materia, del P. Roggiero Boſcovich. Queſta ſupplirà abbondevolmente a tutto; abbraccia eſſa, e la teorìa, e la pratica, di modo, che può ommettere l'una chi ſolamente dilettiſi dell' altra, e chi ſi compiaccia d'amendue le potrà vedere in un ſol punto di viſta unite, ed illuſtrare. Trall' altre ſue belle riflesſioni, prende il P. B. ad eſaminare un caſo da me indicato ſolamente, perche con qualche calcolo riducibile agli altri, cioè quando A ſia una tale frazione $\frac{BCD\ldots ec.}{MNP\ldots ec.}$, che abbia uno, o più fattori decimali in uno, o in amendue de' ſuoi termini.

LIBRO SECONDO.

Formazione, e Sommazione delle Serie.

CAPO PRIMO.

Serie, che nascono dalle potenze, e dalle radici algebraiche.

Proprietà delle potenze d'un binomio.

1. SI chiama *Serie*, come è noto, dagli Analisti qualunque moltitudine, ammasso, unione di quantità, che le une alle altre succedansi con un cert' ordine, e con una costante legge comune a tutti; e la parte più interessante nella teoria delle serie è di trovare i termini generali delle serie proposte, e date le serie, o i loro termini generali, trovare la somma generale delle medesime. Per andare con ordine in questa trattazione, esporrò nel presente capo, e nel seguente, diverse serie, che naturalmente si svolgono, e nascono dal calcolo delle quantità algebraiche, e nel capo terzo, dopo d'avere distinte in classi, ed espresse generalmente diverse serie, spiegherò il metodo per trovare la loro somma, ed il loro termine generale.

2. Le serie, che nascono dalle potenze algebraiche d'un binomio vogliono essere le prime a considerarsi: tutte racchiudonsi sotto la forma $(a+b)^{m-1}$: Contempliamo per ciò nella tavola seconda le potenze prima, seconda, terza..... di $a+b$. 1.° La più alta potenza di a, ha per esponente l'esponente della potenza di $a+b$, e sta solamente nel primo termine di ciascuna potenza, andando sempre sminuendo d'un' unità negli

altri

altri, fino all' ultimo termine, nel quale non si trova potenza alcuna di a, ovvero si trova a^0.

2.° La seconda parte b del binomio $a+b$ non si vede nel primo termine, o più veramente, vi si trova coll' esponente zero, è di una dimensione nel secondo termine, e da questo agli altri termini crescono sempre d'un' unità gli esponenti delle sue potenze, fino all' ultimo, in cui egli ha la sua potenza massima d'esponente eguale all' esponente della potenza.

3.° Quindi in ciascuna potenza di $a+b$ gli esponenti della prima parte a formano una progressione aritmetica decrescente colla differenza costante eguale all' unità, e gli esponenti di b formano la stessa progressione, ma rovesciata, cioè disposta con ordine contrario. Tutto s'intenda andando da sinistra verso la destra.

4.° In ciascun termine le dimensioni, o gli esponenti delle potenze di a, e di b prese insieme sono tante, quante sono le unità nell' esponente della potenza, e quindi tutti i termini delle particolari potenze di $a+b$ sono omogenei.

5.° Ciascuna potenza del binomio è formata da tanti termini più uno, quante sono le unità nell' esponente del grado; la seconda potenza ha tre termini, la terza quattro.... ec.

6.° In qualunque potenza di $a+b$ il numero de' termini, ne' quali si trova b, è eguale al numero de' termini, ne' quali si trova l'a, e questo numero è eguale all' esponente della potenza.

7.° L'ultimo termine di qualunque potenza, cioè b^m è eguale al coefficiente mb, che ha l'altra parte a del binomio nel secondo termine della potenza medesima, ma diviso per m, ed alzato alla potenza m; $b^2 = \left(\frac{2b}{2}\right)^2$

$$b^3 = \left(\frac{3b}{3}\right)^3$$

... ec.

8.° Da

8.° Da ciascuna formola delle potenze di $a+b$, si deducono le parti componenti di ciascuna potenza d'un binomio. Il quadrato, o la seconda potenza d'un binomio qualunque è composto dai quadrati delle parti, e da due prodotti della prima parte nella seconda; il cubo, o la terza potenza d'un binomio qualunque è composto da' cubi delle parti, da' tre prodotti del quadrato della prima parte nella seconda, e da' tre prodotti del quadrato della seconda nella prima. La quarta potenza... ec.

3. Meritano una particolare riflessione i coefficienti numerici de' termini di ciascuna potenza. 1.° In ciascuna potenza di $a+b$ i coefficienti numerici de' termini egualmente lontani dagli estremi sono eguali. Nella quinta potenza di $a+b$ il coefficiente 5 del secondo termine è eguale al coefficiente 6 del penultimo; il... ec.

2.° I coefficienti numerici di ciascuna potenza, crescono di termine in termine, quindi con ordine contrario decrescono fino all' ultimo.

3.° Quindi per le potenze d'esponente impari; basta trovare i coefficienti della metà del numero de' termini, per avere i coefficienti degli altri termini: per le potenze d'esponenti pari... ec.

4.° I coefficienti de' primi termini delle potenze di $a+b$ formano una serie paralella d'unità: i cofficienti de' secondi termini formano la serie de' numeri naturali: i coefficienti degli altri termini formano diverse serie di numeri, che tutte nascono dalla somma continua de' termini della serie precedente.

5.° Se l'esponente della prima parte a d'un termine qualunque n^{esimo}, si multiplichi per il coefficiente numerico del medesimo termine n^{esimo}, ed il prodotto si divida per il numero de' termini precedenti inclusivamente il termine n^{esimo}, il quoto sarà eguale al cofficiente del termine, che segue, cioè del termine $(n+1)^{esimo}$.

4. Soggiungo due altri metodi per trovare i cofficienti di ciascun termine per le formole delle potenze di $a+b$.

Pri-

Primo metodo 1 . 1 .... coefficienti della prima potenza

$$\frac{1\ .\ 1}{1\ .\ 2\ .\ 1}$$ ..... coefficienti della seconda potenza

$$\frac{1\ .\ 2\ .\ 1}{1\ .\ 3\ .\ 3\ .\ 1}$$ .. coefficienti della terza potenza

$$\frac{1\ .\ 3\ .\ 3\ .\ 1}{1\ .\ 4\ .\ 6\ .\ 4\ .\ 1}$$ coefficienti della quarta potenza

...... ec.

Secondo metodo più semplice. Si alzi alla potenza m il binomio $1+1$; i termini di questa potenza saranno i coefficienti della potenza m del binomio $a+b$.

$(1+1)^2 = 1+2+1$ .... coefficienti di $(a+b)^2$

$(1+1)^3 = 1+3+3+1$ ..... coefficienti di $(a+b)^3$

..... ec.

5. Queste considerazioni sulle potenze del binomio $a+b$ hanno grandissimo uso nell' Analisi delle equazioni: ne accenno due soli. 1.° Ci sono molte equazioni, nelle quali uno de' membri può divenire una potenza perfetta d'una quantità conosciuta, coll' aggiungere all' equazione medesima, o col sottrarne un' altra conosciuta quantità: Se si sottragga b^3 dai membri dell' equazione $x^3 - 3bx^2 + 3b^2x = c^3$, si ha $x^3 - 3bx^2 + 3b^2x - b^3 = c^3 - b^3$, in cui il primo membro è un cubo perfetto di $x-b$; aggiungendo a^2 ai membri dell' equazione $x^2 - 2ax = bc$, si ha $x^2 - 2ax + a^2 = bc + a^2$ ... ec.
2.° Rendendo con quest' artificio potenza perfetta di qualche quantità uno de' membri dell' equazione, si viene ad avere il valore dell' incognita con una semplice estrazione di radici. Per le equazioni di secondo grado della forma $x^2 - px - q = 0$, sarà $x^2 - px = q$, ed aggiungendo il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine px, cioè aggiungendo $\frac{1}{4}p^2$,

si ha

ſi ha $x^2 - px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$; donde eſtraendo la radice ſeconda, ſi ha $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}$, come al num. 94 dell' introduzione.

Per le equazioni di grado quarto della forma $x^4 - px^2 - qx - r = 0$, ſarà $x^4 - px^2 = qx + r$, ed aggiungendo $zx^2 + \frac{(p+z)^2}{4}$ ſi avrà A...... $x^4 - (p-z)x^2 + \frac{(p+z)^2}{4} = zx^2 + qx + r + \frac{(p+z)^2}{4} = z\left(x^2 + \frac{qx}{z} + \frac{r}{z} + \frac{(p+z)^2}{4z}\right)$. Conſiderando il primo membro di queſt' equazione, ſi vede ſubito, che eſſo è un quadrato perfetto; il ſecondo membro dell' equazione medeſima ſarebbe pure un quadrato multiplicato per z, ſe foſſe $\frac{q^2}{4z^2} = \frac{r}{z} + \frac{(p+z)^2}{4z}$, cioè ſe foſſe $\frac{q^2}{4z} = r + \frac{(p+z)^2}{4}$, oſſia ſe foſſe $z^3 + 2pz^2 + p^2z - q^2 = 0$; ſoſtituendo adunque in A il valore
$+4rz$
di z preſo da queſta equazione, ed eſtraendo le radici, ſi avrà traſponendo, $x^2 \mp x\sqrt{z} \mp \frac{q}{2\sqrt{z}} = 0$; che, coll' ambiguità de'
$+\frac{z-p}{2}$
ſegni, e l'x^2, eſprime tutte e quattro le radici della data equazione.

6. Ma per tornare al noſtro propoſito; per il num. 2. ſi hanno per ordine tutte le potenze di ciaſcuna parte a, b del binomio $a+b$; per il num. 3. ſi trovano i coefficienti di ciaſcun termine delle potenze medeſime; per avere adunque qua-

 lun-

lunque potenza del binomio $a+b$, non farà bifogno, che di unire acconciamente infieme quefti coefficienti, e quefte potenze delle parti a, b. Così i coefficienti della quarta potenza d'un binomio fono $1.4.6.4.1$; le potenze della prima parte a fono $a^4 . a^3 . a^2 . a^1 . a^0$; le potenze della feconda parte b fono $b^0 . b^1 . b^2 . b^3 . b^4$; fi difpongano quefte tre ferie, come nella figura feguente, e multiplicando feparatamente tutto ciò, che fi trova nella fteffa colonna verticale

$$\begin{array}{ccccc} a^4 & a^3 & a^2 & a^1 & a^0 \\ b^0 & b^1 & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

Sarà $(a+b)^4 = a^4 + 4ba^3 + 6b^2a^2 + 4b^3a + b^4$

7. Se fi poteffe generalmente efprimere per qualunque grado di potenze ciafcuna di quefte tre ferie; la multiplicazione de' termini di quefte ferie, fatta come nell' efempio precedente, ci darebbe una efpreffione generale di tutte le potenze d'un binomio, e ciò bafterebbe per ifvolgere in ferie le quantità della forma $(a+b)^{m-1}$. Proviamoci a farlo.

Evoluzione in ferie delle potenze d'un binomio.

8. Sia P la prima parte del dato binomio, e Q la feconda; farà $P+Q$ la generale efpreffione del medefimo; fia in oltre $m-1$ l'efponente della potenza cercata.

1.° L'efponente del primo termine di qualunque potenza è eguale all' efponente della potenza cercata; il primo termine adunque di qualunque potenza $m-1$ di $P+Q$, farà P^{m-1}; e ficcome gli efponenti della prima parte P vanno fcemando d'un' unità negli altri termini, la ferie delle potenze di P farà generalmente

$$P^{m-1} . P^{m-2} . P^{m-3} . P^{m-4} . P^{m-5} \dots \text{ec.}$$

2.° La

2.° La seconda parte Q ha l'esponente zero nel primo termine, l'esponente 1 nel secondo, il 2 nel terzo... ec., cioè la serie delle potenze della seconda parte Q sarà generalmente

$$Q^0 \,.\, Q^1 \,.\, Q^2 \,.\, Q^3 \,.\, Q^4 \,.\, Q^5 \,.\, Q^6 \,\ldots\ldots \text{ ec.}$$

3.° Si multiplichi l'esponente $m-1$ della prima parte P, che sta nel primo termine, per il coefficiente 1 del primo termine medesimo, e si divida il prodotto per il numero de' termini, che precedono il secondo; si avrà $\frac{m-1}{1}$ per coefficiente del secondo termine; Multiplicando $m-2$ esponente di P, che sta nel secondo termine per $\frac{m-1}{1}$ coefficiente del secondo termine, si ha $\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1}$; e dividendo questo prodotto per 2, numero de' termini, che precedono il terzo, si ha $\frac{m-1\,.\,m-2}{1\,.\,2}$ per coefficiente del terzo termine; e colla stessa legge si troverà generalmente la serie de' coefficienti

$$1;\ \frac{m-1}{1};\ \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2};\ \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,\overline{m-3}}{1\,.\,2\,.\,3};\ldots\ldots \text{ ec.}$$

4.° Disponendo queste tre serie come nel num. precedente, si avrà

$$\begin{array}{llll} P^{m-1} & P^{m-2} & P^{m-3}\ldots\ldots \text{ ec.} & \\ Q^0 & Q^1 & Q^2\ \ldots\ldots \text{ ec.} & \\ 1 & \frac{m-1}{1} & \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2} & \ldots\ldots \text{ ec.} \end{array}$$

$$(P+Q)^{m-1} = P^{m-1} + \frac{m-1}{1} P^{m-2} Q + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2} P^{m-3} Q^2 + \ldots \text{ ec.}$$

Questa formola con poche sostituzioni si riduce alla celebre formola Newtoniana del binomio.

9. Qualunque quantità polinomia si può separare in due parti, una delle quali si chiami P, e l'altra Q: quindi colla precedente formola si può elevare a qualunque potenza $m-1$ qualunque quantità polinomia; l'esperienza però mostra quanto siano nojose le frequenti sostituzioni, che si devono perciò fare nella predetta formola, di quantità alle volte assai complesse. Tentiamo adunque, colla scorta di Eulero, di renderla più commoda del pari, che universale anche per le quantità infinitinomie (*).

Si osservi: 1.° Che $P+Q$ è eguale a $P\left(1+\frac{Q}{P}\right)$; cioè $(P+Q)^{m-1}$ $=P^{m-1}\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{m-1}$; alzando adunque alla potenza $m-1$ il secondo fattore $1+\frac{Q}{P}$, e multiplicando ciascuno de' suoi termini per P^{m-1}, si avrà la potenza $m-1$ di $P+Q$.

2.° Per

(*) Il P. Ruggiero Giuseppe Boscovich ha pubblicato nel giornale de' letterati di Roma all' anno 1747. un altro elegantissimo metodo, per alzare un infinitinomio a qualunque potenza, e nel 1748. vi ha aggiunto una memoria divisa in due parti, che contiene varie importanti riflessioni sul metodo medesimo. Uno de' singolari pregi di questo metodo si è, che fa trovare immediatamente da se, e con somma facilità qualunque termine della potenza cercata senza avere ricorso ai termini precedenti; con ciò egli schiva le frequenti diverse sostituzioni, sempre necessarie negli altri metodi, e sempre moleste al calcolatore. Noi ci siamo serviti in questo secondo libro del metodo d'Eulero per essere più uniformi nello scrivere, e più coerenti a tutta la presente dottrina della evoluzione delle serie; ma stimiamo di non dovere privare il pubblico del piacere, e del profitto, che possono trarre gli Studiosi delle Matematiche, dalla lettura d'una memoria ancora in dita del citato P. B., in cui ha egli resa la dimostrazione del suo metodo, e più diretta, ed incomparabilmente più semplice, che nelle altre due. Questa memoria si troverà al fine del libro.

2.° Per alzare $1+\frac{Q}{P}$ alla potenza $m-1$; è evidente, che se sarà $\frac{Q}{P}=ax$, sarà pure $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{m-1}=(1+ax)^{m-1}=1+\frac{m-1}{1}$

$ax+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\ .\ 2}a^2x^2+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1\ .\ 2\ .\ 3}a^3x^3+\ldots$ ec.

Se $\frac{Q}{P}=ax+bx^2$, sarà $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{m-1}=\left(1+(ax+bx^2)\right)^{m-1}=$

$=1+\frac{m-1}{1}(ax+bx^2)+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\ .\ 2}(ax+bx^2)^2+\ldots$ ec.

Se $\frac{Q}{P}=ax+bx^2+cx^3$, sarà $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{m-1}$

$=\left(1+(ax+bx^2+cx^3)\right)^{m-1}=1+\frac{m-1}{1}(ax+bx^2+cx^3)$

$+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\ .\ 2}(ax+bx^2+cx^3)^2+\ldots$ ec.

Se... ec.

10. Supposte queste cose; 1.° Si rappresenti indeterminatamente la potenza $m-1$ di $1+\frac{Q}{P}$ colla serie $1+Ax+Bx^2$ $+Cx^3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+Kx^{m-3}+Lx^{m-2}+Mx^{m-1}+Nx^m$; resta a trovarsi il valore di A, B, C, D... ec.

2.° Col metodo esposto nella introduzione, si formino le potenze particolari indicate nel num. precedente, e per ciascuna supposizione del valore $\frac{Q}{P}$ si ordini per x la potenza $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{m-1}$; rappresentandosi colla serie precedente ciascuna serie di $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{m-1}$ si potranno supporre eguali tra se i termini corrispondenti di amen-

amendue; onde si ha $(1+ax)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}ax$

$$+\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2}a^2x^2 + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,\overline{m-3}}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^3 + \ldots \text{ ec.}$$

ed $A = \frac{m-1}{1}a \qquad C = \frac{m-3}{3}aB \qquad N = \frac{m-n}{n}aM.$

$B = \frac{m-2}{2}aA \qquad D = \frac{m-4}{4}aC$

Di più si ha $(1+ax+bx^2)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}ax$

$$+\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2}a^2x^2 + \ldots \text{ ec.}$$

$$+\frac{m-1}{1}bx^2$$

ed $A = \frac{m-1}{1}a \qquad C = \frac{m-3}{3}aB + \frac{2m-3}{3}bA$

$B = \frac{m-2}{2}aA \qquad N = \frac{m-n}{n}aM + \frac{2m-n}{n}bL$

Finalmente si ha per l'ultima supposizione

$(1+ax+bx^2+cx^3)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}ax$

$$+\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2}a^2x^2 + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,\overline{m-3}}{1\,.\,2\,.\,3}a^3x^3 + \ldots \text{ ec.}$$

$$+\frac{m-1}{1}a^2x^2 \qquad + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2}2abx^3 \qquad + \ldots \text{ ec.}$$

$$+\frac{m-1}{1}c^3x^3 \qquad + \ldots \text{ ec.}$$

ed

ed $A = \frac{m-1}{1} a$

$$B = \frac{m-2}{2} aA + \frac{2m-2}{2} b$$

$$C = \frac{m-3}{3} aB + \frac{2m-3}{3} bA + \frac{3m-3}{3} c$$

$$N = \frac{m-n}{n} aM + \frac{2m-n}{n} bL + \frac{3m-n}{n} cK$$

11. Quindi si ha generalmente per l'infinitinomio

$$(1 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots \text{ec.})^{m-1} = 1 + Ax$$
$$+ Bx^2 + Cx^3 + \ldots \text{ec.; ed}$$

$$A = \frac{m-1}{1} a$$

$$B = \frac{m-2}{2} aA + \frac{2m-2}{2} b$$

$$C = \frac{m-3}{3} aB + \frac{2m-3}{3} bA + \frac{3m-3}{3} c$$

$$D = \frac{m-4}{4} aC + \frac{2m-4}{4} bB + \frac{3m-4}{4} cA + \frac{4m-4}{4} d$$

$$E = \frac{m-5}{5} aD + \frac{2m-5}{5} bC + \frac{3m-5}{5} cB + \frac{4m-5}{5} dA + \frac{5m-5}{5} e$$

.... ec.

12. E' facilissimo l'uso di questa formola per la formazione delle potenze. Si riduca la quantità data ad avere l'unità per primo termine, come s'è fatto al num. 9.; si paragonino i coefficienti della lettera x, che distingue i termini nella quantità data

data coi coefficienti della formola $1 + ax + bx^2 \ldots$ ec., si sostituisca nelle formole di A, B, C .... il valore di m, e di a, b, c... ec.

13. Nella formola medesima si noti: 1.° Che il coefficiente N viene determinato dai coefficienti di tanti termini della quantità data, quante sono le lettere a, b, c.... delle quali è composto $\frac{Q}{P}$; fatto $\frac{Q}{P} = ax$, l'N è determinato dal precedente termine M; fatto $\frac{Q}{P} = ax + bx^2$, l'N è determinato da due precedenti termini L, M.

2.° Che le particolari formole di A, B, C, D, E... ec., si possono continuare all' infinito; E' chiara la legge, che vi regna: Nella colonna de' primi termini l'm è sminuito successivamente di $1 . 2 . 3 . 4 \ldots n$, cioè de' numeri della serie naturale; il divisore di $m - n$ è sempre n; le lettere piccole nella prima colonna sono tutte a, nella seconda sono sempre b, nella terza c;... coll' ordine alfabetico, ed in ciascuna colonna il primo termine è senza lettere majuscole, il secondo contiene l'A, il terzo B, il quarto C.... parimenti coll' ordine alfabetico.

14. Si noti finalmente, come di passaggio, che la serie de' coefficienti $\frac{\overline{m-1}}{1}$; $\frac{\overline{m-1} . \overline{m-2}}{1 . 2}$; $\frac{\overline{m-1} . \overline{m-2} . \overline{m-3}}{1 . 2 . 3}$.... ec. scioglie compiutamente il problema, tanto usato nell' algebra, delle combinazioni. Data qualunque moltitudine $m - 1$ di lettere a; b; c; d... ec. trovare quanti diversi prodotti di due, di tre, di quattro..... lettere si possono formare. E' evidente, che facendo il prodotto di ciascuna lettera in ciascuna delle altre, ciascuna lettera entra ne' prodotti un egual numero di volte, e che dovendosi ciascuna lettera multiplicare per ciascuna delle altre, e non per se stessa, ciascuna lettera entra ne' prodotti

dotti un numero di volte $m-2$; ma ogni prodotto verrà due volte, giacchè $pq = p \times q = q \times p$; quindi i prodotti delle lettere, ne' suoi diversi binari saranno $\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2}$;

Così pure per avere i ternari è necessario multiplicare ogni binario per tutte le altre lettere toltene le sue due, e verrà tre volte lo stesso prodotto, quando per qualunque delle sue tre lettere si multiplicherà il residuo suo binario, onde il numero de' prodotti a tre a tre, sarà $\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,\overline{m-3}}{1\,.\,2\,.\,3}$;

similmente il numero de' prodotti a quattro a quattro, sarà $\frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,\overline{m-3}\,.\,\overline{m-4}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$, e così nelle altre combinazioni. Onde il coefficiente del termine $n+1$ nella formola del binomio esprimerà il numero de' prodotti, o delle combinazioni d'un numero qualunque di lettere prese n ad n.

Evoluzioni delle quantità radicali.

15. Torniamo alle proposte formole. Non servon esse solamente a svolgere in serie le quantità finite, o infinitinomie della forma $(a+b)^{m-1}$, oppure $(1+ax+bx^2+cx^3 \ldots \text{ec.})^{m-1}$; anche le quantità radicali si sottopongono facilmente alle formole medesime, essendosi dimostrato nell' introduzione, che $\sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}}$; Si faccia $m-1=\frac{r}{s}$, e si divida a in due parti $P+Q$; non vi sarà maggiore difficoltà nell' estrarre le radici, che nel formare le potenze. Resta a dimostrarsi, che le formole abbian luogo, qualunque sia il numero $m-1$.

 S'è

S'è già veduto il caso, in cui $m-1$ sia un numero intero positivo. Se $m-1$ è numero rotto positivo rappresentato da $\frac{r}{s}$, e ridotto a minimi termini: Si alzi, per mezzo della formola, la data quantità $1+x$ alla potenza $\frac{r}{s}$; si avrà una quantità disegnabile per $1+z$: dunque se questa è eguale ad $(1+x)^{\frac{r}{s}}$, elevando ciascuna alla potenza s si avrà $(1+z)^s=(1+x)^r$: ora, facendo il calcolo, che veramente è longhissimo, si trovano identiche queste espressioni.

Se $m-1$ è numero intero, o rotto negativo; Si rappresenti per $-\frac{r}{s}$, e si avrà $(1+x)^{-\frac{r}{s}}=\frac{1}{(1+x)^{\frac{r}{s}}}$; Si trovi: 1.º Il valore di $(1+x)^{-\frac{r}{s}}$, supponendo a ciò buona la formola delle potenze; si avrà $1+z$.

2.º Si trovi colla medesima formola il valore di $(1+x)^{\frac{r}{s}}$; Sostituendo questo valore di $(1+x)^{\frac{r}{s}}$ al denominatore di $\frac{1}{(1+x)^{\frac{r}{s}}}$, dovrebbe essere $\frac{1}{(1+x)^{\frac{r}{s}}}=1+z$; $\frac{1}{(1+x)^r}=(1+z)^s$, ed $(1+x)^s\ (1+z)^r=1$, come pure farà vedere il calcolo.

16. Applichiamo la formola ad un esempio. Si cerchi la radice seconda di $a^2+2ab+b^2$; Si avrà $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$ $=(a^2+2ab+b^2)^{\frac{1}{2}}$

1.º

1.º $m-1=\frac{1}{2}$

$m-2=-\frac{1}{2}$

$m-3=-\frac{3}{2}$

... ec.

2.º $\frac{m-1}{1}=\frac{1}{2}$

$\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\;.\;2}=-\frac{1}{8}$

$\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1\;.\;2\;.\;3}=\frac{1}{16}$

... ec.

3.º $P \quad = a^2$

$P^{m-1} = a$

$P^{m-2} = \frac{1}{a}$

... ec.

4.º $Q \quad = 2ab+b^2$

$Q^2 \quad = 4a^2b^2+4ab^3 + b^4$

$Q^3 \quad = 8b^3a^3+12b^4a^2 + 6b^5a+b^6$

... ec.

Multiplicando i termini corrifpondenti, fi ha

$a+b+\frac{b^2}{2a}-\frac{b^2}{2a}+\ldots$ ec.

Sembra a prima giunta, che quefta ferie non efprima il vero valore della radice cercata, che, come a tutti è noto, dovrebbe effere $a+b$; ma, facendovi un po di rifleffione, fi vede manifeftamente l'identità di quefte due efpreffioni. Nella propofta ferie i termini, che vengon dopo i primi due, fi elidono vicendevolmente. Il termine $\frac{b^2}{2a}$, viene elifo dal feguente $-\frac{b^2}{2a}$, e così nel refto; onde la ferie fi riduce ad $a+b$.

17. Si noti; 1.º Che ciocchè s'è detto della prima formola delle potenze, vale ancora per l'altra più generale delle quantità infinitinomie.

2.° Che le serie dedotte da queste formole sono serie finite quando $m-1$ è un numero intero positivo.

3.° Che negli altri casi si hanno sempre serie prodotte all'infinito, o almeno sotto una forma di termini infiniti.

Altro metodo per l'Evoluzione de' radicali.

18. Sia A la data quantità radicale di grado $m-1$; C la sua radice prossima; E la parte sconosciuta, che si dovrebbe aggiungere a C per avere la radice esatta.

Sarà $A=(C+E)^{m-1}=C^{m-1}+\frac{m-1}{1}C^{m-2}E+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\ .\ 2}$ $C^{m-3}E^2+\ldots.$ ec.; trascurando tutti i termini, che contengono E alzato ad una potenza maggiore di E^2, si avrà

$$A=C^{m-1}+\frac{m-1}{1}C^{m-2}E+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\ .\ 2}C^{m-3}E^2.$$

D'onde $\frac{m-1}{1}C^{m-2}E+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\ .\ 2}C^{m-3}E^2=A-C^{m-1}=B.$

Si divida quest'ultima equazione, 1.° per $\overline{m-1}\ C^{m-2}$.

2. Per $\overline{m-1}\ C^{m-2}+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\ .\ 2}C^{m-3}E$; si avrà dalla prima divisione $\frac{B}{\overline{m-1}.C^{m-2}}$ maggiore di E della piccolissima frazione $\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}.C^{m-3}E^2}{2\overline{m-1}.C^{m-2}}=\frac{\overline{m-2}.E^2}{2C}$; e dalla seconda si avrà $E=\frac{B}{\overline{m-1}.C^{m-2}+\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1\ .\ 2}C^{m-3}E}$; e sostituendo al

deno-

denominatore del fecondo membro il primo valore di E; fi avrà

$$E = \overline{m-1}\,.\,C^{m-1} + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\;C^{m-3}\,B}{2\,.\,\overline{m-1}\,.\,C^{m-2}}$$

$$= \frac{B}{\overline{m-1}\,.\,C^{m-1} + \frac{\overline{m-2}\,.\,B}{2\,C}};$$

e multiplicando per C i termini di queſta frazione, fi ha

$$E = \frac{BC}{\overline{m-1}\,.\,C^{m-1} + \frac{m-2}{2}\,.\,B}$$ da aggiungerfi a C.

Tre altre formole per la Evoluzione de' radicali.

19. Si divida la feconda equazione del num. precedente per il coefficiente di E^2, fi compifca il quadrato (num. 5.), e fi fciolga l'equazione, che ne rifulta; fi avrà

$$E^2 + \frac{2}{m-2}\,C E = \frac{2B}{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}\,.\,C^{m-3}},$$

ed $E = -\frac{1}{m-2}\,C \pm \sqrt{\frac{1}{(m-2)^2}\,C^2 + \frac{2}{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}\,.\,\frac{B}{C^{m-3}}}$;

e facendo $\frac{B}{\overline{m-1}\,.\,C^{m-3}} = D$, farà

$$E = -\frac{1}{m-2}\,C \pm \sqrt{\frac{1}{(m-2)^2}\,C^2 + \frac{2D}{m-2}}.$$

20. Si aggiunga C all' ultima equazione del num. precedente, fi avrà $C + E = \frac{m-3}{m-2}\,C \pm \sqrt{\frac{1}{(m-2)^2}\,C^2 + \frac{2D}{m-2}}$.

21. Di-

21. Dividendo per $\frac{m-1}{1}C^{m-2}$ la terza equazione del num. 18.,

si ha $CE + \frac{m-2}{2}E^2 = D$; ossia $(C + \frac{m-2}{2}E)E = D$;

donde $E = \frac{D}{C + \frac{m-2}{2}E}$.

22. Sulle precedenti formole si noti in generale: 1.° Che esse si applicano egualmente a numeri, che alle quantità algebraiche.

2.° Che le formole irrazionali, cioè quelle, che contengono qualche parte radicale non sono buone, che pe' gradi più elevati del secondo.

3.° Che le radici razionali danno una radice approssimata minore della vera, e le irrazionali la danno maggiore; più però s'accostano queste al vero valore, che non quelle.

4.° Che fatta una determinazione di E, se ne può fare una seconda, una terza, e così all' infinito; basta chiamare C la radice già trovata per mezzo delle formole, quindi determinare un nuovo B.... così si correggerà l'errore, per cui nessuna delle formole precedenti dà la radice esatta, cioè l'avere da principio negligentati i termini, in cui E ha più di due dimensioni.

5.° Le formole saranno tante più esatte, quanto più il C s'accosterà alla radice vera; Quindi ne' numeri si prende assai volte per primo C il numero prossimamente maggiore della radice della massima potenza. Ciò si fa quando il numero dato è più vicino ad una potenza maggiore, che ad una minore alla data; l'operazione mostrerà in questi casi le variazioni, che si devono fare ne' segni.

6.° Sostituendo nelle precedenti formole i valori di m per i diversi gradi di radici, si stenderanno facilmente delle tavole utili,

li, o delle particolari formole per tutti i casi. Dalla formola del num. 20. si deducono tutte le formole proposte dall' Allejo per l'estrazione, ed approssimazione delle radici.

Ultimo metodo per la Evoluzione de' radicali.

23. QUesto è il più semplice ad enunciarsi, ed a mettersi in pratica. Si estragga col metodo esposto nell' introduzione, la radice della potenza massima, che sta nascosta nella quantità data; Si continui ad operare sull'ultimo residuo collo stesso metodo, unendo al calcolo delle quantità intere anche quello delle frazioni.

Per la quantità $\sqrt{a^2 \pm x^2}$; prendo la radice quadrata di a^2, che è a, e la scrivo accanto ad $a^2 \pm x^2$; sottraggo il quadrato di a, cioè a^2, da $a^2 \pm x^2$; resta $\pm x^2$. Divido $\pm x^2$ per il doppio del primo termine della radice, e trovo per secondo termine $\pm \frac{x^2}{2a}$. Multiplico $\pm \frac{x^2}{a^2}$ per $2a \pm \frac{x^2}{a^2}$, e sottraggo il prodotto $\pm x^2 + \frac{x^4}{4a^2}$ da $\pm x^2$; resta $-\frac{x^4}{4a^2}$. Divido questo residuo per il doppio di $a \pm \frac{x^2}{2a}$, e trovo, per terzo termine della radice, $-\frac{x^4}{8a^3}$. Continuando allo stesso modo l'operazione, avrò un numero indefinito di termini, cioè una serie infinita, che esprimerà il valore di $\sqrt{a^2 \pm x^2}$.

$$\begin{array}{l} a^2 \pm x^2 \\ -a^2 \\ \hline \pm x^2 \\ \mp x^2 - \frac{x^4}{4a^2} \\ \hline - \frac{x^4}{4a^2} \\ \ldots\ldots \text{ ec.} \end{array} \Bigg) \; a^2 \pm \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \ldots\ldots \text{ ec.}$$

24. Se la proposta quantità fosse $\sqrt{x^2 \pm a^2}$; colle stesse operazioni si avrebbe $x \pm \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} \pm \frac{a^6}{16x^5} - \frac{a^8}{128x^7} \pm \ldots$ ec.

25. Se a^2 è maggiore di x^2 sarà più convergente la serie del num. 23.; Se x^2 è maggiore di a^2, sarà più convergente la serie del num. 24.; Se a^2 è eguale ad x^2, amendue le serie saranno paralelle. Col medesimo metodo si ridurranno in serie le radicali trinomie, quadrinomie... ec.

Applicazione de' metodi precedenti alle quantità numeriche.

26. TRa tutte le formole spiegate sopra per l'evoluzione delle quantità radicali, scelgo ad applicare a' numeri interi quella del num. 21., perchè mi sembra più difficile delle altre. Con questa formola si fa l'estrazione di qualunque radice da qualunque numero per mezzo della semplice divisione, maneggiata però con qualche particolare artificio. Spiegherò in prima le preparazioni necessarie per ridurre qualunque dato numero ad essere un dividendo capace di dare co' quoti di ciascuna operazione ciascuna figura della radice, che si cerca; spiegherò in secondo luogo quali essere debbano i membri

della

della divisione; in terzo luogo quale divisore, e quale minutore si debba prendere in ciascuna operazione.

Preparazioni. 1.° Il numero dato *A* si separi da destra a sinistra in classi di tante figure ciascuna, quante sono unità nell' esponente della radice cercata; l'ultima classe, cioè quella, che stà più a sinistra, non importa, che sia composta d'un minor numero di figure, del quale lo sono le altre, anche da una sola:

2.° Si estragga (Tav. 1.ª) dall' ultima classe la radice vera, o prossimamente minore della cercata; essa sarà la prima parte, ossia la più alta figura della radice cercata.

3.° Si sottragga dall' ultima classe del dato numero *A* la potenza della radice trovata, d'esponente eguale all' esponente della radice cercata; si chiami *B* il residuo.

4.° Si premettano verso la destra della parte radicale trovata tanti zeri, quante sono le classi del dato numero, una meno; si chiami *C* il prodotto.

5.° Si alzi *C* alla potenza d'esponente eguale all' esponente della radice cercata meno due unità, e per il prodotto di questa potenza multiplicata per l'esponente della radice cercata si divida *B*; il quoto sarà il cercato dividendo *D*.

$$D = \frac{B}{m-1\, C^{m-3}} \ldots\ldots B = A - C^{m-1}$$

Membri della divisione. Si separi da destra a sinistra il dividendo*D*, come nelle radici quadrate; la prima classe a sinistra meno l'ultima figura della classe medesima sarà il primo membro della divisione: Il residuo del minutore sottratto da tutta intera questa prima classe, con la classe, che immediatamente la segue verso la destra (meno l'ultima figura) sarà il secondo membro della divisione, e così nel resto fino a comprendere in qualche membro di divisione tutte le classi del dividendo una ad una, come nell' ordinaria divisione.

 Di-

Divisori. Si prenda sempre nell' operazione seguente per divisore tutto intero il numero radicale E trovato colle precedenti divisioni; il primo divisore però sarà in qualunque estrazione di radici la prima parte trovata nella preparazione di A.

Minutori. Si multiplichi il quadrato di E per l'esponente della radice cercata sminuito d'un' unità; alla metà del prodotto si aggiunga il decuplo del divisore multiplicato per E; si avrà il minutore M.

$$M = CE + \frac{m-2}{2} E^2$$

Esempio. Si cerchi la radice quarta di 27.9841 ... A. La radice quarta della prima classe 27 è 2; sottraendo $(2)^4$ da 27, si ha per residuo 11, che congiunto all' altra classe da 119841 ... B; mettendo un zero avanti alla prima parte radicale 2 a ragione del numero delle classi, si ha 20 ..... C. La potenza d'esponente $4-2$ di C è 400, che multiplicata per 4 esponente della radice da 1600; e dividendo B per 1600, si ha 74, 9 ... D. Dividendo la classe 74 meno la prima figura 4, cioè dividendo 7 per la trovata figura radicale 2, si ha per quoto 3 .... E e quindi $CE = 60$

$$\frac{m-2}{2} E^2 = \frac{27}{2}$$

$$\text{cioè } M = 60 + \frac{27}{2} = 73, 5$$

da sottrarsi dall' intera classe 74; il residuo 0, 5 congiunto colle altre figure 0, 90, cioè 1, 4 è da trascurarsi.

27. Questo residuo da trascurarsi, è la maggiore difficoltà, che s'incontri nell' applicazione a' numeri della nostra formola. Per quale ragione s'ha a trascurare l'ultimo residuo? e se si deve trascurare, perchè mai s'ingiunge di fare l'ultima sottrazione, coll' inutile calcolo di trovare l'ultimo valore di M? Fa an-

ancora ſorpreſa il vedere, che cercando col noſtro metodo le radici de' quadrati perfetti ſi ha ſempre zero per reſiduo, e nelle altre potenze di grado più elevato, e comunque perfette, ſi ha ſempre un reſiduo maggiore del zero. Ma ſi rifletta 1.° alla natura de' minutori, che ſi adoperano in ciaſcuna operazione. Nelle radici quadrate D è rigoroſamente eguale ad M; cioè $D = M$, donde $D - M = 0$; ma nelle altre radici qualunque, anche di potenze perfette, D è eguale ad M, ed a qualche coſa di più; a cagione d'eſempio: Se $m - 1 = 4$ come nel caſo noſtro, ſarà $D = \left(C + \frac{3}{2} E\right) E + \frac{E^3}{C} \div \frac{E^4}{4C^2} = M + \left(E + \frac{E^2}{4C}\right) \frac{E^2}{C^2}$;

perciò è, che ſottraendo da D il ſolo M, non ſi ſottrae tutta quella quantità, che ſola potrebbe rendere il reſiduo eguale a zero.

Si rifletta in 2.° luogo, che il più delle volte non ſi prende per D l'eſatto valore di $\frac{B}{\overline{m-1}\; C^{m-3}}$, ma un valore approſſimato in decimali; come nell'eſempio addotto s'è preſo per D il numero 74, 9, quando dovrebbe eſſere 74, $9\frac{1}{16}$; quindi, comunque il minutore foſſe ſempre eſatto, non ſi avrebbe ſempre zero per reſiduo, dovendoſi perciò ſottrarre l'eſatto minutore $M + N$ da un eſatto D. Di fatti correggendo nel noſtro eſempio queſte due origini d'errore, ſi avrà zero per reſiduo

$$D = 74,\ 9\frac{1}{16} \ldots\ldots\ M = 73,\ 5$$

$$E = 3 \qquad\qquad N = 1,\ 4\frac{1}{16}$$

$$C = 20$$

donde $D = M + N$, cioè $74,\ 9\frac{1}{16} = 73,\ 5 + 1,\ 4\frac{1}{16}$

Quanto all' ultima sottrazione; essa non è inutile come sembra a primo aspetto. Si fa quest' ultima sottrazione per vedere se l'ultima figura radicale è maggiore del giusto: Suppongo, che nelle figure radicali si mettano sempre i quoti massimi delle particolari divisioni, e perciò, se si veda, che il minutore è maggiore del membro intero della divisione, si avrà un segno sicuro che la figura radicale E, che lo ha prodotto, dovrà sminuirsi d'un' unità, di due, di tre...., finchè M non sia maggiore del membro della divisione.

28. Non va dissimulato un notabile incomodo di questo metodo, comunque egli sia assai semplice, e spedito, e perciò degno d'essere preferito ad ogni altro. Negli altri metodi, se si ha zero per ultimo residuo, egli è certo, che il dato numero è potenza perfetta di grado dato; se si ha un residuo maggiore di zero, il numero dato è veramente una potenza imperfetta: Nel nostro, fuori della quadrata, si ha in qualunque estrazione di radici qualche residuo maggiore del zero, se non si corregge il D, e l'M con lunghi calcoli, ed il mezzo più semplice, ma pur nojoso, per vedere se il dato numero è potenza perfetta, o no, è d'alzare la radice trovata alla potenza di grado dato, e se questa potenza A' sarà eguale al dato numero, il dato numero sarà potenza perfetta, altrimenti no.

29. Quando A sia una potenza imperfetta: 1.° Si sottragga A' da A, e sarà $A - A' = B'$, ed operando sopra questo secondo B, come s'è fatto sul primo (prendendo per C la radice trovata), si avrà una nuova approssimazione alla radice vera, massime aggiungendo a B' varj zeri per figure decimali.

2.° Se venga limitato il numero delle figure da aversi nella radice approssimata, non è necessario cercarle tutte col metodo esposto, ma solamente fino ad una figura di più della metà del numero determinato di figure; per trovare poi le altre, basta l'ordinaria divisione dell' ultimo residuo colla radice trovata. Si

cer-

cerchi la radice quadrata di 7, con dodici figure: Col metodo spiegato si troveranno le prime sette figure 2, 645751, coll' ultimo residuo 822999; si divida quest' ultimo residuo per la radice trovata, fino ad avere cinque figure; si avrà per quoto 31106, e la radice seconda di 7, sarà 2, 64575131106. Questa è una elegante proprietà del nostro metodo.

30. In ogni evoluzione de' radicali numerici, c' entrano adunque tre quantità; B, D, M,

Per il secondo grado... $B = A - C^2$

$$D = \frac{B}{2C^0} = \frac{1}{2} B$$

$$M = \left(C + \frac{1}{2} E\right) E$$

Per il terzo grado..... $B = A - C^3$

$$D = \frac{B}{3C}$$

$$M = (C + E) E$$

Per il quarto grado.... $B = A - C^4$

$$D = \frac{B}{4C^2}$$

$$M = \left(C + \frac{3}{2} E\right) E$$

.... ec.

E' facile a vedersi la legge di tutti i B, C, M; a cagione d'esempio negli M si distinguono due parti; la prima è sempre CE; e per la seconda parte conviene separare gli M in due classi di radici; cioè le radici d'esponente pari, come la seconda, la quarta, la sesta....., e le radici d'esponente impari, come la terza,

terza, la quinta, la settima ..... Nelle radici della prima classe la seconda parte del minutore è sempre $\frac{1}{2} E^2$ multiplicato per un termine della serie impari 1 . 3 . 5 . 7 ... ec.; Nelle radici della seconda classe, la seconda parte del minutore è sempre E^2 multiplicato per un termine della serie naturale 1 . 2 . 3 ... ec., secondo l'ordine de' gradi, o degli esponenti del dato radicale. Bastano le riflessioni fatte sulla formola del num. 21. per fare comprendere il modo d'applicare le altre formole algebraiche ai numeri.

Evoluzione delle radici nelle equazioni composte.

31. A Due forme, e non più, si riducono tutte le equazioni composte; altre hanno la forma $x^{m-1} = A$, e si chiamano equazioni *non affette* d'altri termini; altre hanno la forma $ax + bx^2 + cx^3 + \ldots\ldots$ ec. $= A$, e si chiamano equazioni affette. L'equazioni di primo genere si sciolgono coll' estrazione delle radici, avendosi $x = \sqrt[m-1]{A}$; per le altre, oltre ai metodi esposti nella introduzione, se ne deduce uno assai semplice dai metodi precedenti.

Si prenda ad arbitrio qualunque quantità C; se questa sarà una radice di x, si avrà $a\,C + b\,C^2 + c\,C^3 + \ldots\ldots$ ec. $= A$; se $aC + bC^2 + \ldots$ ec. sarà maggiore di A, quel primo C sarà maggiore della radice cercata, e se sarà minore di A, quel primo C sarà minore della radice medesima: Nel primo caso si dovrà sottrarre da C una quantità E, e nel secondo si dovrà aggiungere a C la quantità medesima E, e nel primo caso sarà $x = C - E$, nel secondo sarà $x = C + E$. Ci rimane adunque di trovare in amendue i casi il valore di E; cerchiamolo nel secondo caso, ed il metodo si adatterà da se stesso al caso primo.

1.° Se

1.° Se $C + E$ è il vero valore di x, si avranno le seguenti equazioni.

$$\text{I. } ax = aC + aE$$

$$\text{II. } bx^2 = bC^2 + 2bCE + bE^2$$

$$\text{III. } cx^3 = cC^3 + 3cC^2E + 3cCE^2 + cE^3$$

$$\text{IV. } dx^4 = \dots \text{ ec.}$$

2.° Trascurando i termini, in cui E ha più di due dimensioni, si avrà

$$aC + aE + bE^2 = A$$
$$bC^2 + 2bCE + 3cCE^2$$
$$cC^3 + 3cC^2E + \dots \text{ ec.}$$
$$\dots \text{ec.} + \dots \text{ ec.}$$

3.° Facendo eguale ad l il primo termine cognito, la somma de' coefficienti di E eguale ad m, e la somma de' coefficienti di E^2 eguale ad n, si avrà $l + mE + nE^2 = A$, ed $nE^2 + mE = A - l = B$; dividendo quest' equazione per n, ed estraendo le radici, si ha $E = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4nB.}}{2n}$

32. Si divida l'equazione $nE^2 + mE = B$, 1.° per m;
2.° per $m + nE$;

Si avrà, 1.° $E = \frac{B}{m}$, trascurando $\frac{n}{m}E^2$;

2.° $E = \frac{B}{m + nE}$; cioè, sostituendo in quest' ultima equazione il valore di E della prima, si avrà $E = \frac{B}{m + \frac{nB}{m}}$, e multi-

pli-

plicando per m i termini di questa frazione, sarà $E = \frac{mB}{m^2 + nB}$.

33. Su questi valori approssimati di E per le equazioni affette si facciano riflessioni simili a quelle, che si sono fatte sui valori di E per le equazioni non affette, o per l'evoluzione de' radicali. E' evidente inoltre, che quanto sarà C più vicino al vero valore di x, sarà più convergente il metodo: Per avere con facilità un valore approssimato di x da prendersi per C fino dalla prima operazione, espongo il metodo per trovare i limiti delle radici d'un' equazione.

Per l'equazione $x^2 + px - q = 0$, sarà 1.° $x^2 + px = +q$

$$px < +q$$

$$x < +\frac{q}{p}$$

2.° $x^2 < +q$

$$x < \sqrt{q}$$

$$x^2 < x\sqrt{q}$$

$$x^2 + px < x\sqrt{q} + px$$

3.° $q < x\sqrt{q} + px$

$$q < (\sqrt{q} + p)x$$

$$\frac{q}{\sqrt{q} + p} < x$$

cioè i limiti delle radici saranno $\frac{q}{p}$, e $\frac{q}{\sqrt{q} + p}$; il primo maggiore, il secondo minore del valor vero. Allo stesso modo si troveranno i limiti dell' equazione $x^2 - px + q = 0$, $p\ \frac{q}{p}$, ed i limiti dell' equazione $x^2 - px - q = 0$, $p + \sqrt{q}$, e $\sqrt{p^2 + q}$;

e così

e così nel resto per le equazioni di grado più elevato del secondo. Nell' equazione $x^2 - 5x - 31 = 0$, i limiti sono $\sqrt{56}$, e $5 + \sqrt{31}$, il primo minore, il secondo maggiore di x; Onde per applicarvi le formole si prenda $C = 8$, e si troverà dopo due periodi d'operazioni, cioè determinati da E, $x = 8,6032\ldots$ ec.

34. Per non avere la noja di calcolare i radicali, e le frazioni, che in questo metodo d'approssimazione s'incontrano non di rado, si sciolga ogni frazione, ed ogni radicale in numeri decimali, come nell' aritmetica comune. E' stato Newton il primo, che ha introdotti i decimali nelle equazioni con impareggiabile compendio, e facilità delle operazioni più intralciate.

X CAPO

CAPO SECONDO.

Serie, che nascono dalle frazioni Algebraiche.

Primo metodo per l'evoluzione delle frazioni Algebraiche.

35. IL primo metodo per svolgere in serie una frazione qualunque $\frac{a^2}{b \pm x}$, è l'ordinaria divisione algebraica. Dividendo a^2 per b, si ha per primo termine della serie $\frac{a^2}{b}$; sottraendo da a^2 il prodotto $\frac{a^2}{b} \times (b \pm x)$, si ha per residuo $\mp \frac{a^2 x}{b}$; dividendo questo residuo per b, si ha per secondo termine della serie $\mp \frac{a^2 x}{b^2}$, e procedendo con quest' ordine, si avrà la serie

$$\frac{a^2}{b} \mp \frac{a^2 x}{b^2} + \frac{a^2 x^2}{b^3} \mp \frac{a^2 x^3}{b^4} + \ldots \text{ ec.} = A.$$

Se la frazione fosse $\frac{a^2}{x \pm b}$, sarebbe la serie a lei eguale

$$\frac{a^2}{x} \mp \frac{a^2 b}{x^2} + \frac{a^2 b^2}{x^3} \mp \frac{a^2 b^3}{x^4} + \ldots \text{ ec.} = B.$$

36. Se nella serie A sia x minore di b, cosicchè $\frac{x}{b}$ sia una frazione propria, la serie A sarà convergente; dacchè b, e le potenze di b stanno al denominatore della serie, e sempre più elevate d'un grado, che l'x del numeratore; ciocchè rende successivamente minori i termini seguenti rispetto ai precedenti; ciò si

ſi comprenderà meglio ſe alla ſerie A ſi dia la forma equivalente

$$\left(\frac{a^2}{b} \mp \frac{a^2 x}{b^2}\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{b^2} + \frac{x^4}{b^4} + \frac{x^6}{b^6} + \ldots \text{ ec.}\right);$$

Per la ragione contraria ſi proverà, che ſe $x < b$, la ſerie B ſarà divergente, maſſime ſe ſi riduca alla forma

$$\left(\frac{a^2}{x} \mp \frac{a^2 b}{x^2}\right) \times \left(1 + \frac{b^2}{x^2} + \frac{b^4}{x^4} + \frac{b^6}{x^6} \ldots \text{ ec.}\right);$$

Collo ſteſſo metodo ſi potranno dedurre le ſerie equivalenti alla data frazione, poſto $b = x$; in queſto caſo ſarà meglio mutare la forma al denominatore, per non avere delle ſerie, o illuſorie, o falſe.

Secondo Metodo.

37. Si ſvolgono in ſerie le frazioni algebraiche colla formola delle potenze d'un binomio; E' evidente, che $\frac{a^2}{b \pm x}$ $= a^2 (b \pm x)^{-1}$; ſi faccia $m - 1 = -1$, cioè $m = 0, P = b, Q = x$, e ſi avrà $(b \pm x)^{-1} = 1 \mp b^{-2} x + b^{-3} x^2 \mp \ldots$ ec., e multiplicando i termini di queſta ſerie per a^2, ſi avrà la ſerie A del num. 35.. Si dica lo ſteſſo negli altri caſi.

38. E' evidente, che i due metodi precedenti ſi applicano del pari alle frazioni di termini comunque compleſſi; invece di uſare la formola del binomio, riuſcirà più ſpedito il calcolo per molte frazioni colla formola dell'infinitinomio, ma creſcerà ſempre la complicazione del calcolo col creſcere i termini delle quantità compleſſe, che ſi mettano al numeratore, o al denominatore delle date frazioni. Paſſo a ſpiegare un altro metodo più elegante, con cui agevolmente ſi coſtruirà una tavola per le frazioni di termini infinitinomi.

39. Sia data la frazione $\frac{a}{b+cx}$; Si supponga $\frac{a}{b+cx} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots\ldots$ ec., restano a determinarsi i coefficienti A, B, $C\ldots$ ec. Multiplicando l'equazione per $b+x$, si ha

$$a = bA + bBx + bCx^2 \ldots\ldots \text{ ec.}$$
$$+ cAx + cBx^2 \ldots\ldots \text{ ec.},$$

e paragonando i termini corrispondenti ne' due membri di questa equazione, si ha

$$bA = a$$
$$bB + cA = 0$$
$$bC + cB = 0$$
$$\ldots \text{ ec.}$$

Dalla prima equazione si ha $A = \frac{a}{b}$; con questo valore di A, e colla seconda equazione, si ha $B = -\frac{ca^2}{b^2}$, e quindi colla terza $C = \ldots$ ec.; cioè con quelle equazioni di primo grado si determineranno i coefficienti cercati, e dopo tre, o quattro determinazioni si vedrà la legge della serie, e si avrà

$$\frac{a}{b+cx} = \frac{a}{b} \times \left(1 - \frac{c}{b}x + \frac{c^2}{b^2}x^2 - \frac{c^3}{b^3}x^3 \ldots \text{ ec.}\right).$$

40. Considerando attentamente i termini di questa serie, si ha il coefficiente Q di qualunque termine, dato il coefficiente P del termine precedente, essendo $Q = \frac{cP}{b}$, ed avendosi sempre $A = \frac{a}{b}$, si avranno successivamente tutti gli altri. Anzi il coefficiente

ciente di qualunque termine x^n è eguale a $\pm\frac{ac^n}{b^{n+1}}$; il + è per l'n numero pari, il — è per l'n impari, e generalmente il coefficiente di x^n è $\frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b}\right)^n$

41. Applicando il medesimo metodo alle frazioni di denominatori trinomj; dati P, Q coefficienti di due termini, si avrà il coefficiente del seguente termine, cioè

$R=-\frac{cQ+dP}{b}$; per i denominatori quadrinomj, sarà

$S=-\frac{cR+dQ+eP}{b}$; cioè si ha il coefficiente S dati i coefficienti de' tre termini precedenti, e facendo

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3\ldots \text{ ec.}}{1-gx-hx^2-ix^3\ldots \text{ ec.}}=A+Bx+Cx^2+Dx^3\ldots\ldots\ldots$$
$$+Px^n+Qx^{n+1}+Rx^{n+2}+Sx^{n+3}\ldots \text{ ec.}$$ Si ha

$A=a$
$B=gA+b$
$C=gB+hA+c$
$D=gC+hB+iA+d$
$E=gD+hC+iB+lA+e$
..... ec.

E' chiara la legge di questa serie: i coefficienti della prima colonna sono sempre g, della seconda h, della terza i..... coll' ordine alfabetico g, h, i, l, m... ec.; le lettere majuscole stanno in ciascuna colonna coll' ordine alfabetico A, B, C, D... ec., e coll' ordine alfabetico si succedono gli ultimi termini delle colonne a, b, c, d... ec.

42. Se

42. Se la frazione avesse la forma $\frac{a + bx + cx^2 \ldots . + bx^m}{(1 - ix)^{m+1}}$;

Si avrà collo stesso metodo il coefficiente del termine distinto da x^n nella serie indeterminata.

per $m = 1$

$$\frac{n+1}{1} i^n a + \frac{n}{1} i^{n-1} b.$$

per $m = 2$

$$\frac{\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1 \,.\, 2} i^n a + \frac{n.\overline{n+1}}{1.\ 2} i^{n-1} b + \frac{n.\overline{n-1}}{1.\ 2} i^{n-2} c$$

per $m = 3$

$$\frac{\overline{n+1}.\overline{n+2}.\overline{n+3}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} i^n a + \frac{n.\overline{n+1}.\overline{n+2}}{1.\ 2 \,.\, 3} i^{n-1} b$$

$$+ \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n+2}}{1.\ 2 \,.\, 3} i^{n-2} c + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.\ 2 \,.\, 3} i^{n-3} d$$

per $m = 4$

. . . . ec.

43. E più generalmente ancora, se la frazione avrà la forma

$$\frac{1}{(1 - ax - bx^2 - cx^3 - \ldots . \text{ ec.})^{m+1}}$$

ciascun coefficiente S si determinerà da' coefficienti di tanti termini precedenti, quante sono le lettere a, b, c, d; e si avrà

$$S = \frac{m+n}{n} a R + \frac{2m+n}{n} b Q + \frac{3m+n}{n} c P + \frac{4m+n}{n} d O + \ldots \text{ ec.}$$

44. Si noti, che se il primo termine del denominatore della data frazione non fosse un termine conosciuto, come sempre abbiamo supposto fin qui, colla semplice divisione si ridurrà alle formole spiegate.

Sia,

Sia, a cagione d'esempio, data la frazione $\frac{a + b x + c x^2 \ldots \text{ ec.}}{f x - g x^2 - h x^3 \ldots \text{ ec.}}$

$= Z$; si avrà $Z = \frac{a + b x + c x^2 \ldots \text{ ec.}}{x (f - g x - h x^2 \ldots \text{ ec.})}$; e determinato $A + B x$

$+ C x^2 + \ldots \text{ ec.} = \frac{a + b x + c x^2 \ldots \text{ ec.}}{f - g x - h x^2 \ldots \text{ ec.}}$; sarà $Z = \frac{1}{x} (A + B x$

$+ C x^2 + \ldots \text{ ec.})$; E' manifesto il modo di ridurre il denominatore ad avere per primo termine l'unità, quando prima siasi ridotto ad avere per primo termine una quantità costante.

Spezzamento delle frazioni.

45. Sia la frazione $\frac{a + x^n}{(e + f x)^p (g + h x)^q (k + l x)^r \ldots \text{ ec.}}$, ed n $< (p + q + r + \ldots \text{ ec.})$

1.° Si supponga la data frazione rappresentata da

$$\frac{A + B x + C x^2 \ldots\ldots + F x^{p-1}}{(e + f x)^p} + \frac{G + H x + I x^2 \ldots\ldots + M x^{q-1}}{(g + h x)^q}$$

$$+ \frac{N + P x + Q x^2 \ldots\ldots + T x^{r-1}}{(k + l x)^r} + \ldots \text{ ec.}$$

2.° Multiplicando la proposta equazione, e la frazione indeterminata, per il denominatore della proposta, si ha

$$a + x^n = (A + B x + C x^2 \ldots + F x^{p-1}) (g + h x)^q (k + l x)^r \ldots$$
$$+ (G + H x + I x^2 \ldots\ldots M x^{q-1}) (e + f x)^p (k + l x)^r \ldots + \ldots \text{ ec.}$$

3.° Ordinando il secondo membro dell'equazione per x, e paragonando i termini de' due membri, si avranno tante equazioni, quante sono le lettere indeterminate A, $B \ldots$ ec. donde si avran-

no

no i valori di A, B, C.... da sostituirsi nella frazione indeterminata.

Esempio. Nella frazione $\frac{1+z^2}{z(1-z)(1+z)}$, dovendosi pel metodo prendere tanti termini del numeratore indeterminato, quante sono unità nell'esponente di z del dato fattore, si ha

$\frac{1+z^2}{z(1-z)(1+z)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{1-z}+\frac{C}{1+z}$; e multiplicando l'equazione per il prodotto de' dati fattori, si ha

$$\begin{aligned} 1+z^2 = & -Az^2 + Bz + A. \\ & +Bz^2 + Cz \\ & -Cz^2 \end{aligned}$$

paragonando i termini de' due membri di quest'equazione, si ha

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B+C &= 0 \\ -A+B-C &= 1; \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 1 \\ C &= -1 \text{, ed } \frac{1+z^2}{z(1-z)(1+z)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}-\frac{1}{1+z} \end{aligned}$$

46. Non è necessario fare le multiplicazioni indicate nel metodo, e di ordinare per x il prodotto, come nell' esempio precedente. Si suppongano eguali a zero, uno, ad uno, i denominatori dati, e ciascuna di queste supposizioni ci darà nell' equazione ridotta il valore d'una delle indeterminate. Nel nostro esempio, si ha

$$1+z^2 = A(\overline{1-z}.\overline{1+z}) + B(z.\overline{1+z}) + C(z.\overline{1-z}).$$

fatto

fatto il primo fattore $z=0$, l'equazione si riduce ad $1=A$.
fatto il secondo fattore $1-z=0$, si ha $z=1$, e l'equazione si riduce ad $1+1=A(\overline{1-1}.\overline{1+1})+B(1.\overline{1+1})+C(1.\overline{1-1})$ cioè a $2=2B$, donde $B=1$.
fatto il terzo fattore $1+z=0$; si ha allo stesso modo $z=-1$, e $C=-1$.

47. Dalla forma della frazione indeterminata, si vede, che tutti i fattori eguali del dato denominatore devono formare un solo fattore nelle frazioni spezzate; il problema altrimenti ci mena all' impossibile. Sia la frazione

$\frac{1-2z+3z^2-4z^3}{(z-1)(z-1)(z-2)(2z-1)}$; comunque siano quattro i fattori del denominatore, non si possono avere che tre frazioni equivalenti, ed una delle spezzate deve avere per denominatore il prodotto $(z-1)(z-1)$, cioè $z-1)^2$; in una parola, i denominatori delle frazioni spezzate devono essere primi tra se.

48. Se le radici del denominatore sono imaginarie; 1.° Sia

$\frac{x^m}{L+Mx+Nx^2\ldots\ldots+Ux^n}$; (si suppone sempre $m<n$)

$=\frac{A+Bx}{a+bx+cx^2}+\frac{C+Dx}{e+fx+gx^2}+\frac{E+Fx}{h+kx+lx^2}+\ldots$ ec.; e sia $(e+fx+gx^2)(h+kx+lx^2)=Q$; $(a+bx+cx^2)(h+kx+lx^2)=R$; $(a+bx+cx^2)(e+fx+gx^2)=S$; sarà, secondo il metodo generale, $x^m=(A+Bx)Q+(C+Dx)R+(E+Fx)S+\ldots$ ec.; e supponendo (num. 46.) $a+bx+cx^2=0$, sarà $R=0$, $S=0$; donde $x^m=(A+Bx)Q$.

2.° Siano

2.° Siano di più le radici imaginarie di $a + bx + cx^2 = 0$, rappresentate da $t + px = 0$, $p + qx = 0$; sarà $x = -\frac{t}{r}$, ed $x = -\frac{p}{q}$; e per $x = -\frac{t}{r}$, si ha $Q = \left(e + f\left(-\frac{t}{r}\right) + g\left(\frac{t^2}{r^2}\right)\right) \times \left(b + k\left(-\frac{t}{r}\right) + l\left(\frac{t^2}{r^2}\right)\right)$, ed allo stesso modo si avrà un altro valore di Q, cioè Q', per l'altro valore di $x = -\frac{p}{q}$.

3.° Si avranno adunque invece di $x^m = (A + Bx) Q$ le due seguenti equazioni,

$$\text{cioè } -\frac{t^m}{r^m} = (A + Bx) Q \ldots \text{ ed } A = -\frac{t^m}{r^m} : Q + \frac{t}{r} B$$

$$-\frac{p^m}{q^m} = (A + Bx) Q' \ldots\ldots A = -\frac{p^m}{q^m} : Q' + \frac{p}{q} B.$$

Paragonando insieme questi due valori di A, si avrà il valore di B, e sostituendo questo valore di B nelle due equazioni, che hanno dati i due valori di A, si avrà il valore di A.

4.° Ciocchè s'è fatto sul fattore $a + bx + cx^2$, si faccia altresì su ciascuno degli altri, e collo stesso metodo si avranno sempre i valori delle indeterminate.

49. Se le radici del denominatore sono in parte reali, in parte imaginarie; non v'ha differenza alcuna ne' principj, e nelle deduzioni del calcolo. Eulero dal compendio del num. 45. deduce un assai elegante teorema per rompere le frazioni, che hanno per fattore de' loro denominatori una quantità della forma $(p - qx)^n$: basti accennarlo, la dimostrazione è facile. Sia

$\frac{M}{N}$

$\frac{M}{N}$ la frazione data, ed $N = (p - qx)^n X$; fatto $A = \frac{M}{X}$

$$P = \frac{M - AX}{p - qx} \qquad B = \frac{P}{X}$$

$$Q = \frac{P - BX}{p - qx} \qquad C = \frac{Q}{X}$$

$$R = \frac{Q - CX}{p - qx} \qquad D = \frac{R}{X}$$

.... ec. ... ec.

Sarà $\frac{M}{N} = \frac{A}{(p - qx)^n} + \frac{B}{(p - qx)^{n-1}} + \frac{C}{(p - qx)^{n-2}} \ldots + \frac{K}{p - qx}$

Si suppone, che in M, ed in X si metta il valore di x cavato dall' equazione $p - qx = 0$, cioè $x = \frac{p}{q}$.

50. L'ultimo problema sullo spezzamento delle frazioni, è di *spezzare una data frazione in più altre, che siano tante in numero, quanti sono i fattori della data, ed abbiano ciascuna il numeratore eguale al numeratore della medesima.*

E' evidente, che ogni frazione si può ridurre ad avere per numeratore l'unità; così $\frac{a}{b}$ è eguale ad a multiplicato per $\frac{1}{b}$. Si potrà adunque supporre, che il numeratore della data, e delle cercate frazioni sia l'unità, e dopo spezzata la frazione data, e ridotta in questa forma, basterà mettere il dato numeratore per numeratore delle frazioni spezzate invece dell'unità.

51. Siano adunque date le frazioni $\frac{1}{xy}$, $\frac{1}{xyz}$, $\frac{1}{xyzv}$, ... ec.

Sarà $\frac{1}{xy} = \frac{1}{x(y-x)} + \frac{1}{y(x-y)}$

$$\frac{1}{xyz} = \frac{1}{x(y-x)(z-x)} + \frac{1}{y(x-y)(z-y)} + \frac{1}{z(x-z)(y-z)}$$

$$\frac{1}{xyzv} = \frac{1}{x(y-x)(z-x)(v-x)} + \ldots \text{ec.}$$

..... ec.

Cioè ognuna delle frazioni parziali avrà per denominatore uno de' dati fattori multiplicato per tutti i binomi, che si formano, sottraendo esso da tutti gli altri; ed in fatti, riducendo al comune denominatore le equazioni precedenti, si troverà per numeratore d'amendue i membri la stessa quantità.

52. Nel fare questa riduzione al comune denominatore, si noti: 1.° Che ne' denominatori del secondo membro delle precedenti equazioni ogni binomio viene due volte lo stesso, ma co' segni contrarj, essendo, a cagione d'esempio, il binomio $y-x$, che sta al primo termine del secondo membro nella prima equazione affatto eguale al binomio $x-y$, che sta al secondo termine del membro medesimo; quindi, riducendosi tutti, a due, a due, ad una stessa forma, si scemerà per metà il loro numero, e però anche la fatica del calcolo ne' casi più composti.

2.° Nel mutare questi segni sarà bene serbare un ordine costante, mettendo sempre per positivo quel fattore, che ove sono scritti i fattori nella frazione data è scritto il primo, prendendo a cagione d'esempio nella terza equazione i soli $x-y$, $x-z$, $x-v$, $y-z$, $y-v$, $z-v$. In questo modo nel primo termine d'ogni secondo membro si muteranno tutti i segni de' binomj, nel secondo ne resterà un solo non mutato, nel terzo due, ... e nell'ultimo non se ne muterà alcuno. Quindi basterà la-

lasciare all' ultimo termine il suo segno positivo, e mutarlo alternativamente ne' precedenti.

53. Fatta colle premesse due avvertenze la riduzione delle equazioni poste al num. 51., si avrà

I. per $\frac{1}{xy}$

$$x-y=-y+x$$

II. per $\frac{1}{xyz}$

$$(x-y)(x-z)(y-z)=yz(y-z)-xz(x-z)+xy(x-y)$$

III. per $\frac{1}{xyzv}$

$$\begin{aligned}(x-y)(x-z)(x-v)(y-z)(y-v)(z-v)\\ =-yzv(y-z)(y-v)(z-v)\\ +xzv(x-z)(x-v)(z-v)\\ +xyv(x-y)(x-v)(y-v)\\ -xyz(x-y)(x-z)(y-z)\end{aligned}$$

IV. per ... ec.

In ciascuna di queste equazioni, il primo membro è sempre eguale al prodotto delle differenze di ciascuno de' dati fattori sopra tutti i seguenti, ed ogni termine del secondo membro è sempre eguale al prodotto di tutti i fattori (toltone nel primo il primo, nel secondo il secondo..... fattore), ma multiplicato per tutti i binomj delle differenze de' medesimi, prese coll'ordine accennato.

54. Se si proverà l'ugualianza de' due membri di queste supposte equazioni, resterà dimostrato il teorema del num. 51., donde son nati. Ora; 1.° Nella I.ª si vede l'ugualianza de' due membri dall' identità della espressione.

2.° Nella

2.° Nella II.ª il calcolo è facile; vengono, colla multiplicazione attuale, nel primo membro otto termini, e nel secondo sei; ma in quello se ne distruggono due $\pm xyz$, e rimangono in amendue membri i medesimi sei termini, che ordinati in modo che incomincino colla potenza d'esponente 1, e con quell'ordine, con cui sono scritti nella data frazione, sono

$$-xy^2 + yx^2 - zx^2$$
$$+ xz^2 - yz^2 + zy^2$$

3.° Nella III.ª il calcolo attuale resta molto più lungo. Nel primo membro essendovi sei binomj, e portando la multiplicazione per ogni nuovo binomio il raddoppiamento de' termini, si devono avere termini $(2)^6 = 64$, e nel secondo membro portando ciascuno de' quattro termini, dopo la sua evoluzione, sei nuovi termini, corrispondenti a' suoi tre fattori binomj, vi saranno in tutto termini 24. Quindi nel primo membro, perchè resti l'ugualianza, se ne devono distruggere 40. Si vede anche facilmente quali sieno quegli, che vi devono rimanere.

55. Facciamo qualche riflessione di più su i termini, che devono elidersi, o restare ne' membri dell' equazione III.ª. Nella evoluzione de' tre binomj fatta al num. precedente per l'equazione II.ª sono rimasti tutti, e soli que' termini, che avevano la prima potenza di un fattore, unita colla seconda di un altro. Questo accaderà anche qui in ogni termine del secondo membro, rispetto a que' tre fattori, che entrano nella composizione de' quattro suoi termini; multiplicando tutti que' termini nati così per tutti que' fattori medesimi, quello, che era elevato alla seconda potenza, lo sarà alla terza, l'altro che aveva la prima, salirà alla seconda, e vi si troverà di nuovo quello che mancava in quel termine: Per esempio, nell' ultimo termine del secondo membro deve nascere xy^2, xz^2, e colla multiplicazione per xyz verrà $zx^2 y^3$, $yx^2 z^3$. Quindi anche nella evoluzione del

del primo membro, per avere l'ugualtà col membro secondo, devono restare tutti, e soli que' termini, che hanno tutte le combinazioni possibili delle tre diverse potenze di tre diversi fattori. Ora appunto ciò accade, se si fa l'evoluzione attuale: Per farla ordinatamente, si scrivano i binomj con quell'ordine, con cui sopravvengano al sopravvenire de' nuovi fattori. Gli metterò qui così ridotti, e gli contrassegnerò colla lettera *A*; gli separerò gli uni dagli altri con virgole, che non significhino interrotta la continuazione della multiplicazione, ma solo mostrino la pertinenza ad un fattore di più; fino alla prima virgola appartengono ai soli xy, finò alla seconda agli xyz, e presi che siano tutti insieme appartengono agli $xyzv$.
Finalmente svolgerò coll' attuale multiplicazione tutti i prodotti contraddistinguendogli coi *B*, *C*, *D*... ec., e ne soggiungerò dopo la spiegazione.

56.

A

$$(x-y),\ (x-z)(y-z),\ (x-v)(y-v)(z-v)$$

B

$$(x-y)\times\left(xy+\begin{matrix}(-x)\\(-y)\end{matrix}z+z^2\right)\times\left(xyz+\begin{matrix}(-xy)\\(-yz)\\(-yz)\end{matrix}v+\begin{matrix}(x)\\(y)\\(z)\end{matrix}v^2-z^3\right)$$

C

$$xy+\begin{matrix}(-x)\\(-y)\end{matrix}z+z^2$$

D

$$\begin{matrix}(+x)\\(-y)\end{matrix}$$

E

$$\begin{matrix}(+yx^2)\\(-xy^2)\end{matrix}+\begin{matrix}*\,(-zx^2)\\(1)(-xyz)\\(1)(+xyz)*\,(+zy^2)\end{matrix}+\begin{matrix}(xz^2)\\(-yz^2)\end{matrix}$$

F

$$xyz+\begin{matrix}(-xyv)\\(-xzv)\\(-yzv)\end{matrix}+\begin{matrix}(+xv^2)\\(+yv^2)\\(+zv^2)\end{matrix}-v^3$$

G

$$\begin{matrix}(+yx^2)\\(-xy^2)\end{matrix}+\begin{matrix}(-zx^2)\\(+zy^2)\end{matrix}+\begin{matrix}(+xz^2)\\(-yz^2)\end{matrix}$$

H

$$\begin{matrix}(+zy^2x^3)\\(-zx^2y^3)\end{matrix}+\begin{matrix}*\,(-vy^2x^3)\\(1)(-yzvx^3)\\(2)(-zvx^2y^2)*\,(+vx^2y^3)\\(1)(+zvx^2y^2)\\(3)(+xzvy^3)\end{matrix}+\begin{matrix}*\,(+yv^2x^3)\\(1)(+x^2y^2v^2)\\(2)(+yzx^2v^2)\\(1)(-x^2y^2v^2)*\,(-xv^2y^3)\\(3)(-xzy^2v^2)\end{matrix}+\begin{matrix}(-yx^2v^3)\\(+xy^2v^3)\end{matrix}$$

I

$$\begin{matrix}(-yz^2x^3)\\(+xz^2y^3)\end{matrix}+\begin{matrix}(1)(+yzvx^3)*\,(+vz^2x^3)\\(4)(+vyx^2z^2)\\(3)(-vxzy^3)\\(5)(-vxy^2z^2)*\,(-vz^2y^3)\end{matrix}+\begin{matrix}*\,(-zv^2x^3)\\(1)(-yzx^2v^2)\\(4)(-x^2z^2v^2)\\(3)(+xzy^2v^2)*\,(+zv^2y^3)\\(5)(+y^2z^2v^2)\end{matrix}+\begin{matrix}(+zx^2v^3)\\(-zy^2v^3)\end{matrix}$$

K

K

$$\begin{array}{c} (+yx^2z^3) \\ (-xy^2z^3) \end{array} + \begin{array}{l} (4)(-vyx^2z^2) \\ *\ (-vx^2z^3) \\ (6)(-vxyz^3) \\ (5)(+vxy^2z^2) \\ (6)(+vxyz^3) \\ *\ (+vy^2z^3) \end{array} + \begin{array}{l} (4)(+x^2z^2v^2) \\ (6)(+xyz^2v^2) \\ *\ (+xv^2z^3) \\ (6)(-xyz^2v^2) \\ (5)(-y^2z^2v^2) \\ *\ (-yv^2z^3) \end{array} + \begin{array}{c} (-xz^2v^3) \\ (+yz^2v^3) \end{array}$$

57. In *B* vi ſono i binomj di *A* raccolti in tre fattori, formati come ſi uſa nelle equazioni composte, ma preſe a roveſcio, prendendo, per eſempio $(x-v)(y-v)(z-v)$ invece di $(v-x)(v-y)(v-z)$; vengono per tal guiſa le ſteſſe combinazioni de' prodotti, ma co' ſegni contrarj.

In *C* vi è la formola de' ſecondi due binomj, che ha tre colonne, ed in *D* ſta il primo binomio, per cui eſſa ſi deve multiplicare.

In *E* vi ſono tre colonne, nate dalla multiplicazione di *C* per *D*; la prima, e l'ultima colonna hanno due termini per ciaſcuna, che ſono della forma xy^2, xz^2, e reſtano: La colonna di mezzo ha due termini, che ſi diſtruggono, e ſono ſegnati col numero (1), e ne ha due che reſtano, e ſono ſegnati coll'aſteriſco.

In *F* vi è la formola, già ridotta, degli ultimi tre binomj di *A*, uniti in *B*; e in *G*, la formola già trovata in *E* è ridotta coll' ommettere i termini, che ſi elidono.

In *H*, *I*, *K* vi ſono i prodotti di *F* per le tre colonne di *G*, reſtandovi così quattro colonne, ciaſcuna delle quali ha tre membri corriſpondenti, una per una, alle tre colonne di *G*. Nella prima, ed ultima colonna non ſi diſtrugge nulla; nelle due di mezzo ſi elidono dodici termini per ciaſcuna, e ſono ſegnati col numero (1), (2)... ec.; rimangono due ſoli termini per membro, ed hanno la forma xyz^3, xy^2v^3, rimanendo

eliſi tutti quegli della forma $x^3 y^2 v^2$. Qui ſe ne trovano ventiquattro eliſi, e ve ne ſarebbero altri ſedici, ſe nella ſeconda colonna di G ſi foſſero ritenuti que' due, che ſi ſono eliſi in E; giacchè multiplicando per eſſi gli otto termini di F ſi ſarebbero avuti otto termini per uno, durando ſempre i ſegni contrarj.

58. Quindi, raccogliendo i termini non eliſi in H, I, K, ed ordinandogli ſecondo le potenze, e l'ordine de' dati fattori, ſi ha il prodotto indicato in A, che è il primo membro dell' equazione III.ª, ma preſo col ſegno contrario; cioè

$$
\begin{array}{l}
- \quad L \quad - \quad M \quad - \quad N \quad - \quad O \\
- x y^2 z^3 + x y^2 v^3 - x z^2 v^3 + y z^2 v^3 \\
+ x z^2 y^3 - x v^2 y^3 + x v^2 z^3 - y v^2 z^3 \\
+ y x^2 z^3 - y x^2 v^3 + z x^2 v^3 - z y^2 v^3 \\
- y z^2 x^3 + y v^2 x^3 - z v^2 x^3 + z v^2 y^3 \\
- z x^2 y^3 + v x^2 y^3 - v x^2 z^3 + v y^2 z^3 \\
+ z y^2 x^3 - v y^2 x^3 + v z^2 x^3 - v z^2 y^3
\end{array}
$$

e facendo la multiplicaztone attuale indicata in ciaſcun termine del ſecondo membro della medeſima equazione III.ª, ſi avrà

$$
\begin{array}{l}
- x y z (x - y)(x - z)(y - z) = L \\
+ x y v (x - y)(x - v)(y - v) = M \\
+ x z v (x - z)(x - v)(z - v) = N \\
- y z v (y - z)(y - v)(z - v) = O.
\end{array}
$$

Ciocchè moſtra ad evidenza, che l'equazione ſuppoſta al num. 53. per $\frac{1}{xyzv}$, è una vera equazione.

59. Per

59. Per quanti artificj si sieno usati a sminuire il numero de' termini delle attuali multiplicazioni, ad ogni modo dal solo esempio terzo (num. 53.) si vede chiaro, che ne' casi un po più composti il calcolo diventa affatto impraticabile. Adoperando però cotali artificj, si vede almeno in varj esempj la legge de' prodotti, per cui già si può credere generale il teorema, che abbiamo da prima proposto.

60. Per dimostrarlo esattamente, converrebbe 1.° generalmente dimostrare il seguente teorema.

Se dato un numero m *di quantità qualunque, si prendano tutti i binomj, che nascono sottraendo da qualunque delle precedenti, qualunque delle seguenti, e questi binomj si multiplichino tutti tra se, vi resteranno tutti, e soli que' termini, che si formano di quantità* m — 1, *elevate ciascuna alle potenze diverse*, 1 . 2 . 3 ...... (m — 1), *distruggendosi tutti gli altri.*

Dimostrato che fosse questo teorema, sarebbe chiaro, che que' termini devono essere la somma di tutti quegli, che danno le combinazioni di esse prese a $(m-1)$ per volta, e multiplicate in tutti i binomj, che nascono dalle loro differenze prese coll' ordine già prescritto; dacchè colle successive multiplicazioni si fa entrare ne' termini un fattore di più, e si aumenta (num. 55.) d'un' unità l'esponente de' primi.

2.° Converrebbe dimostrare, che i segni nati dal teorema suddetto, cioè i segni del primo membro dell' equazione ridotta (num. 53.), debban essere gli stessi, che nel secondo membro. Ciò si potrebbe fare considerando tutte le combinazioni, che devono nascere ne' prodotti, dalle quantità, e dai segni. In ogni termine vi deve entrare una delle due quantità d'ogni binomio, onde la somma delle potenze deve essere eguale al numero de' binomj; ciascuna quantità si trova in $m-1$ binomj ed è combinata una volta per una colle quantità compagne, cioè negativamente colle precedenti, e positivamente colle seguenti; la

 pri-

prima è sempre positiva, e l'ultima sempre negativa; ciascuna delle intermedie sono positive tante volte, quante sono quantità, che le vengon dopo, e tante volte negative, quante sono quelle, che la precedono.
Questi elementi guidano ad una dimostrazione generale del teorema del num. 50.

61. Intanto, si deduce con facilità dalle cose dette fin qui il numero de' binomj, e de' termini, che devono corrispondere a qualunque dato numero m di fattori, de' quali sia composto il denominatore della data frazione. Nel primo membro adunque dell' equazione formata come al num. 53., si avrà

Numero de' fattori

2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8

Numero de' binomj

1 . 3 . 6 . 10 . 15 . 21 . 28

Numero de' termini

2 . 8 . 64 . 1024 . 32768 . 2097152 . 268435456

Numero de' termini residui

2 . 6 . 24 . 120 . 720 . 5040 . 40320

O a dire più certo, e più in generale, il numero de' binomj sarà in ciascun caso $1+2+3\ldots+(m-1)$, cioè $\frac{m \, . \, m-1}{1 \, . \, 2}=n$; il numero de' termini sarà $(2)^n$; il numero de' residui sarà $1\times2\times3\times4\ldots\ldots\times m$, come si potrà vedere cercando co' metodi da spiegarsi nel capo seguente, i termini generali delle precedenti

denti tre ſerie. Se non ſi dimezzava il numero de' binomj, ſi ſarebbe avuto nella ſeconda riga precedente il doppio, e nella terza il quadrato di ogni numero ivi notato.

62. La Sig.ra Agneſi (Iſtituz. Anal. l. 3. num. 21.) dà qualche eſempio di queſto metodo di ſpezzare le frazioni, in ciaſcuno de' quali vi ſono due ſoli, o al più tre fattori, ed hanno queſta forma $\frac{p}{(x+b)(x+c)}$. Il precetto del metodo è eſpreſſo così: „ Dico, che queſta ſarà eguale a due frazioni, il nume„ ratore delle quali ſia lo ſteſſo di queſta, ed i denominatori „ ſieno; della prima il prodotto d'una delle radici (cioè d'uno „ de' fattori) nella differenza della quantità coſtante dell' altra „ radice, e della quantità coſtante della radice poſta; della ſe„ conda ſia il prodotto dell' altra radice nella differenza della „ coſtante della prima radice, e della coſtante di queſta ſecon„ da ". L'applicazione a' ſuoi eſempj ſi riduce qui ad eſſere $\frac{p}{(x+b)(x+c)} = \frac{p}{(x+b)(c-b)} + \frac{p}{(x+c)(b-c)}$; Si vede dall' eſempio, che per differenza delle due radici intende la prima nominata, meno la ſeconda. Aggiunge poi „ ſe le radici foſſero „ tre, quattro .... ec. ſi proceda ſempre collo ſteſſo metodo "; indi per tutta dimoſtrazione dice „ ed in fatti riducendo al co„ mune denominatore le frazioni in tal guiſa ritrovate, reſti„ tuiranno eſſe la frazione prima donde ſono nate.

63. Chi conſidera queſto parlare della Sig.ra Agneſi, vedrà quanto poco vi ſi eſprime di quello ſi richiede per un metodo generale. Baſta conſiderare quel tanto poco, che vi vuole per due fattori, con quel tanto di più, che ſi richiede ove creſca il loro numero, vedrà facilmente, ſe il portare l'operazione a più fattori ſia un ſemplice *procedere con quell' iſteſſo metodo*, e con un metodo abbaſtanza ſpiegato. Non ſi vede ivi punto il progreſſo dell' operazione, che debba tenerſi, ove i denominatori ſieno

più

più di due; quali sieno le differenze da prendersi in ogni frazione, e da unire in ogni denominatore delle spezzate; e con quale ordine si debbano prendere le differenze medesime. Non vi si esprime nemmeno, che il pigliare la differenza delle sole costanti proviene dal principio più generale del dover prendere la differenza de' fattori, che negli esempj addotti, i quali hanno un x medesimo congiunto con diverse costanti, si riduce alla differenza delle medesime costanti. Innoltre da quanto s'è esposto sopra, si vede quanto sia impraticabile il provare il metodo colla *nula*, ed attuale riduzione allo stesso denominatore, ove il numero de' fattori sia maggior di due, o tre; tanto più, che dall' Agnesi si piglia la stessa differenza positivamente, e negativamente, onde nel metodo steso a più fattori vi vorrebbe un numero di binomj doppio di quello s'è usato qui sopra, cosicchè, ove il numero de' fattori sieno soli cinque, vi vorrebbe più d'un milione di termini, e per otto fattori, più di settanta mila milioni di milioni di termini.

64. Io mi sono trovato in questo labirinto di difficoltà, e dopo lungo andare mi sembravano inestricabili; mi son dovuto raggirare, ed arrampiccare quà, e là con una quantità prodigiosa di lunghissimi, e nojosissimi calcoli. Ma al fine ho travisto, e poscia ho dedotto da me il teorema generale posto al num. 51.; devo però confessare d'essermi, dopo tutto ciò, servito di molti lumi comunicatimi dal P. Boscovich per rendere più spediti agli altri i medesimi calcoli, per conoscere la legge, che osservano i termini nell' elidersi, e per isvolgere i principj, da' quali dipende la generale, e rigorosa dimostrazione.

65. Mi restano ad aggiungere quattro avvertenze. 1.° Non ha luogo il metodo esposto quando nel denominatore della data frazione vi entrino due, o più fattori eguali; dacchè trai binomj de' denominatori v'entrerebbe anche lo zero.
2.° In questi casi si consideri la data frazione, come se avesse un

un ſolo di que' fattori eguali al denominatore; ſi ſpezzi la data frazione, così conſiderata, col metodo ſpiegato, e ſi multiplichino i denominatori delle ſpezzate per il prodotto de' denominatori ommeſſi.

3.° Se uno, o più fattori del dato denominatore ſono compleſſi, P, P', P''... ec., ſi faccia nelle formole del num. 51. $x = P$, $y = P'$... ec., e l'operazione ſarà la ſteſſa.

4.° Il maggior uſo di queſto problema è ne' caſi, in cui i fattori compleſſi ſono compoſti di una ſteſſa variabile con una coſtante diverſa, della forma $x+a$, $x+b$, $x+c$... ec., perchè allora tutti i binomj, che accompagnano ogni fattore nella frazione ſpezzata ſono compoſti di quantità coſtanti, reſtando così in ciaſcuna frazione la quantità variabile elevata alla prima ſola potenza.

Evoluzione delle frazioni continue.

66. SI chiama frazione continua quella frazione, il cui denominatore è formato da una quantità intera, e da una frazione, il cui denominatore è di bel nuovo compoſto da una intera quantità, e da una frazione, il cui denominatore .... ec. Aggiungendo a tutte le frazioni continue una quantità qualunque a, ſi avrà la forma ſeguente

$$a + \cfrac{a'}{b + \cfrac{b'}{c + \cfrac{c'}{d + \cfrac{d'}{e + \cfrac{e'}{\text{.... ec. .... ec.}}}}}}$$

67. E'

67. E' evidente, che

$$a = a$$

$$a + \frac{a'}{b} = \frac{ab + a'}{b}$$

$$a + \cfrac{a'}{b + \cfrac{b'}{c}} = \frac{abc + ab' + a'c}{bc + b'}$$

$$\ldots\ldots \text{ ec.}$$

Le frazioni, che formano il secondo membro di queste equazioni, si chiamano frazioni *equivalenti*, cioè equivalgono alle frazioni, che formano il membro primo; ed è evidente, che qualunque termine d'una frazione equivalente è eguale alla somma de' termini analogi delle due precedenti, ciascuno multiplicato per una nuova lettera; cioè, a cagione d'esempio, il numeratore $abc + ab' + a'c$ della terza è eguale ai numeratori della seconda, e della prima, multiplicati, quello per c, e questo per b'.

Da questo teorema applicato a diverse frazioni equivalenti, si ha un metodo facile per trasformare in una serie, qualunque frazione continua, che è il problema diretto.

68. Si dispongano le frazioni equivalenti, trovate come al num. precedente, in una serie da sinistra a destra, che incominci da a°; sopra ciascun termine di questa serie si scriva, a modo d'esponente, l'ultimo denominatore della frazione corrispondente al termine seguente, e sotto il termine medesimo si scriva l'ultimo numeratore della stessa corrispondente frazione; si avrà per l'esempio addotto

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & \\ a^{\circ} & \dfrac{a}{1} & \dfrac{ab + a'}{b} & \dfrac{abc + ab' + a'c}{bc + b'} & \ldots \text{ ec.} \\ a' & b' & c' & d' & \end{array}$$

Per

Per trovare generalmente il termine R di questa serie; siano $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ i due termini, che immediatamente precedono l'R cercato verso la sinistra, e sia p' l'indice inferiore dell'ultimo precedente $\frac{P}{P'}$, e q l'indice superiore del primo precedente $\frac{Q}{Q'}$; sarà

$$R = \frac{qQ + p'P}{qQ' + p'P'}$$

69. Si noti; 1.° Che s'è incominciata la serie di mezzo da a°, perchè la formola R rappresentasse anche la frazione equivalente ad $a + \frac{a'}{b}$.

2.° Che essendo sempre dati i primi due termini a°, a della serie di mezzo, e tutti gli esponenti, si determineranno colla formola precedente tutti i termini R.

3.° Che determinando tutti gli R fino ad avere impiegato l'ultimo de' dati esponenti, ossia quello, che sta più a destra, l'R, che gli corrisponderà, esprimerà il vero valore esatto della data frazione x, e gli altri R esprimeranno solamente un valore di x approssimato.

4.° Che chiamando R' il secondo termine a della serie di mezzo, andando verso la destra, R'' il terzo, R''' il quarto,... ec. si ha R' minore di x, R'' maggiore di x, R''' minore di x, ..., e così alternativamente, come è manifesto dalla volgare teoría delle frazioni; cosicchè in generale, gli R che hanno un numero pari d'accenti sono maggiori della data frazione, e gli R, che hanno un numero impari d'accenti sono minori della medesima.

70. Quindi finalmente; in qualunque frazione continua x, si ha

$$x = R' + (R'' - R') - (R'' - R''') + (R^{IV} - R''') - (R^{IV} - R^{V}) + \ldots \text{ ec.}$$

71. Resta

71. Resta a cercarsi una regola sicura per continuare all' infinito, senza pericolo d'errare, la serie, che esprime il valore d'x al num. 70. Eccone una assai comoda: Si scrivano in una serie gli R minori di x, e sopra questa, tra gli intervalli della serie già scritta, si collochino gli R maggiori di x, nel modo seguente:

per gli R maggiori di x...... R^{II} R^{IV} R^{VI} R^{VIII}...... ec.
per gli R minori di x..... R^{I} R^{III} R^{V} R^{VII} R^{IX}.... ec.
gli R della serie superiore sono i *minuendi*, gli R della serie inferiore sono i *minutori*; ciascun R della serie superiore va combinato coi due, che gli stanno a lato nella inferiore; l'R^{II} va combinato coll' R^{I} e coll' R^{III} ec., e così nel resto; ciascuna di queste combinazioni va fatta col segno — posto avanti gli R d'accenti impari, e forma un termine della serie cercata, da unirsi agli altri, o col +, o col —, secondo, che porta l'alternazione de' segni, che deve regnare dopo il primo positivo, nella serie x.

72. Sostituendo adunque nella formola del num. 70. i valori di R presi dalla frazione data al num. 66., si ha la serie

$$a + \frac{a'}{b} - \frac{a'b'}{b(bc+b')} + \frac{a'b'c'}{(bc+b')(bcd+b'd+c'd)} - \ldots \text{ ec.},$$

che corrisponde a quella frazione, e facendo nella frazione medesima $a=0$, perchè essa rappresenti le pure frazioni continue, si avrà la serie $\frac{a'}{b} - \frac{a'b'}{b(bc+b')} + \ldots$ ec., che le corrisponde; finalmente se gli a', b', c', d'.... ec., cioè i numeratori d'una data frazione continua siano quantità sempre costanti (a cagione d'esempio tante unità), ed a, coi denominatori b, c, d ... ec. della frazione medesima siano numeri interi positivi, la serie che gli corrisponderà sarà con pochi termini convergentissima al lor vero; in ogni caso però si interromperà la serie semprecchè la data frazione non anderà all' infinito.

73. Pas-

73. Passiamo al problema inverso delle frazioni continue, cioè a trasformare una data serie in una frazione continua. A questo servirà di formola ecumenica la formola del num. precedente, e la frazione corrispondente del num. *66*. Si proceda così.
1.° Si assumano ad arbitrio i numeratori, o i denominatori della frazione continua, che si cerca: Noi qui supporremo assunti i denominatori a, b, c, d... ec.
2.° Si paragoni termine per termine la serie data colla serie del num. precedente; si avranno tante equazioni quanti sono termini della data serie.
3.° Con queste si determinino i numeratori a', b', c'... ec. (se si fossero assunti questi, si determinerebbero i denominatori a, b, c... ec.); cioè si esprimano i loro valori per mezzo delle lettere assunte, e de' termini della serie data.
4.° Si sostituiscano questi valori nella frazione del num. *66*.

74. Applichiamo il metodo a qualche esempio. Sia data la serie

$$x = A - B + C - D + E - \ldots \text{ ec.},$$

che per cominciare con un solo termine positivo sarà rappresentata dalla serie

$$x = \frac{a'}{b} - \frac{a'b'}{b(bc+b')} + \ldots \text{ ec.}$$

Sarà	Quindi
$A = \frac{a'}{b}$	$A = \frac{a'}{b}$
$B = \frac{a'b'}{b(bc+b')}$	$\frac{B}{A} = \frac{b'}{bc+b'}$
$C = \frac{a'b'c'}{(bc+b')(bcd+b'd+c'd)}$	$\frac{C}{B} = \frac{c'b}{bcd+b'd+c'b}$
$D = \ldots$ ec.	$\frac{D}{C} = \ldots$ ec.

Cioè

Cioè

$$a' = Ab$$

$$b' = \frac{Bbc}{A-B}$$

$$c' = \frac{Cd(bc+b')}{b(B-C)}$$

$$d' = \frac{De(bcd+b'd+c'b)}{(bc+b')(C-D)}$$

.... ec.

e finalmente

$$a' = Ab$$

$$b' = \frac{Bbc}{A-B}$$

$$c' = \frac{ACcd}{(A-B)(B-C)}$$

$$d' = \frac{BDde}{(B-C)(C-D)}$$

.... ec.

75. Sia data la ſerie

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + \dots \text{ ec.}$$

Si avrà collo ſteſſo metodo

$$a' = \frac{b}{A}$$

$$b' = \frac{Abc}{B-A}$$

$$c' = \frac{B^2 cd}{(B-A)(C-B)}$$

$$d' = \frac{C^2 de}{(C-B)(D-C)}$$

.... ec.

76. Sia data la ſerie

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{AB} + \frac{1}{ABC} - \frac{1}{ABCD} + \dots \text{ ec.}$$

Sarà $a' = \frac{b}{A}$

$$b' = \frac{bc}{B-1}$$

$$c' = \frac{Bcd}{(B-1)(C-1)}$$

$$d' = \frac{Cde}{(C-1)(D-1)}$$

.... ec.

77. Sia

77. Sia data la ferie

$$x = A - Bz + Cz^2 - Dz^3 + \dots \text{ ec.}$$

Sarà $a' = Ab$ $\qquad c' = \frac{ACcdz}{(A - Bz)(B - Cz)}$

$b' = \frac{Bbcz}{A - Bz}$ $\qquad d' = \frac{BDdez}{(B - Cz)(C - Dz)}$

.... ec.

78. Determinati così i valori de' numeratori, converrà prima di fare le sostituzioni nella formola del num. 66. determinare ad arbitrio i valori de' denominatori a, b, c, d..., ec.; Ma perchè la forma della frazione sia più spedita, sarà bene assumergli tali, che essendo essi numeri interi, esprimano in numeri interi anche i numeratori; questo però dipende altresì dalla natura de' termini della data serie.

Si faccia, a cagione d'esempio,

al num. 74....... $b = 1$

$c = A - B$

$d = B - C$

$e = C - D$

$f = \dots$ ec.

e, fatte le Sostituzioni, si avrà

$$x = \cfrac{A}{1 + \cfrac{B}{(A - B) + \cfrac{AC}{(B - C) + \cfrac{BD}{(C - D) + \cfrac{CE}{(D - E) + \dots \text{ ec.}}}}}}$$

al

al num. 75....... $b = A$

$c = B - A$

$d = C - B$

$e = D - C$

$f = \ldots$ ec.

e si avrà

$$x = \cfrac{1}{A + \cfrac{A^2}{(B-A) + \cfrac{B^2}{(C-B) + \cfrac{C^2}{(D-C) + \ldots \text{ ec.}}}}}$$

così pure al num. 76., fatto $b = A$ ed al num. 77. $b = 1$

$c = B - 1$ $\qquad$ $c = A - Bx$

$d = C - 1$ $\qquad$ $d = B - Cx$

$e = D - 1$ $\qquad$ $e = C - Dx$

$f = \ldots$ ec. $\qquad$ $f = \ldots$ ec.

Si determinerà come sopra la frazione x.

79. Si noti per ultimo, che si può cambiare in frazione continua qualunque frazione, o volgare essa sia, o decimale espressa a modo delle volgari. Sia A il numeratore, e B il denominatore della data frazione; ed usando il metodo del num. 86. dell' Introduzione per avere il comune divisore di due quantità,

Sia

Sia $\frac{A}{B}=a+\frac{C}{B}$

$\frac{B}{C}=b+\frac{D}{C}$ .... donde .... $\frac{C}{B}=\frac{1}{b+\frac{D}{C}}$

$\frac{C}{D}=c+\frac{E}{D}$ .... $\frac{D}{C}=\frac{1}{c+\frac{E}{D}}$

.... ec. .... ec.

quindi $\frac{A}{B}=a+\frac{C}{B}=a+\frac{1}{b+\frac{D}{C}}=a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{E}{D}}}=\ldots$ ec.

coſicchè chiamando a, b, c, d... ec. i quoti interi, e trovati col metodo accennato, ſi avrà $x=\frac{A}{B}$

$$=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f+\ldots \text{ ec.}}}}}}$$

80. Per dare un eſempio di queſto metodo, egli è noto, che ſe ſi concepiſca diſteſa in lungo la ſemiperifería d'un circolo qualunque, eſſa paragonata al raggio, che la ha deſcritta, ſi troverà proſſimamente tripla del raggio medeſimo, cioè la lunghezza del raggio ſta alla lunghezza della ſemiperifería proſſimamente come l'unità a 3. Queſta ragione del raggio r preſo per unità alla lunghezza della ſemiperifería ſi eſprime più eſattamente, come l'unità al numero

3,

3,14159265358979323846264338327950288419716939937510
58209749445923078164062862089986280348253421170679 8
214808651327230664709384 46 .... ec. $= p$.

Si tratti ora d'esprimere la ragione di p ad r con numeri così piccoli, che non se ne possa avere una più accurata, se non usando numeri molto maggiori. Ognun vede, che basta mutare in una frazione continua il dato numero decimale p, ed una delle frazioni equivalenti sarà la frazione, o la ragione cercata. In questa sorte di problemi quanto più i termini della data ragione son grandi, tanto più sarà accurata la determinazione; ma nell' esempio nostro sarebbe impraticabile il calcolo, se si volessero usare tutte le 129 figure, che danno quel prossimissimo valore di p. Determinando la frazione continua corrispondente alle trentadue prime figure, si troveranno i quoti

$$3 \;.\; 7 \;.\; 15 \;.\; 1 \;.\; 292 \;\ldots \text{ec.}$$

e le frazioni equivalenti formeranno la serie, contata dopo l'a° del num. 68.

$$\frac{3}{1} \,.\, \frac{22}{7} \,.\, \frac{333}{106} \,.\, \frac{355}{113} \,.\, \frac{103993}{33102} \ldots \text{ec.}$$

La prima frazione mostra, che $p:r::3:1$, nè si può più accuratamente esprimere in numeri non maggiori la ragione di p ad r; la seconda frazione da $p:r:22:7$, che è la ragione *Archimedea;* e la quarta frazione da $p:r::355:113$, che è la ragione *Mezziana* maggiore della vera meno di $\frac{1}{113 \times 33102}$; tutte poi le ragioni espresse coi termini trovati sono alternativamente minori, e maggiori della vera, la prima è minore, la seconda è maggiore, la terza è minore, la quarta maggiore... ec., come abbiamo già notato sopra.

81. Si

81. Si facciano le ſteſſe riflessioni ſulla frazione 0, 000290 88820866572... ec., e ſu 206264, 7887323... ec.
La prima frazione eſprime la lunghezza d'un arco circolare d'un minuto primo, ed è cavata dalla ſeguente analogía: la ſemiperifería ſta all' arco d'un minuto primo, come p ſta al quarto; La ſeconda frazione eſprime il numero de' ſecondi, che comprenderebbe il raggio d'un circolo, ſe eſſo foſſe curvato in arco ſulla perifería del circolo medeſimo, ed è dedotta dalla ſeguente analogía, come p ſta ad r, così la ſemiperifería eſpreſſa in ſecondi ec. (cioè 648000 ſecondi) ſta al quarto termine. Colla prima frazione ſi ha facilmente la lunghezza d'un arco qualunque; baſta multiplicare per quella il numero de' primi minuti, de' quali è compoſto l'arco dato. Colla ſeconda frazione ſi ha facilmente l'arco, che corriſponde a qualunque (per parlare cogli Aſtronomi) funzione circolare, eſpreſſa in parti del raggio; baſta multiplicare per quella frazione la funzione data.
Si noti 1.° Che per avere la ſeconda frazione s'è uſata la ragione Mezziana della ſemiperifería al raggio.
2.° Che riducendo la ſeconda frazione a' gradi, ſi vede, che il raggio è eguale a 57 gradi, 17 minuti, e 44, 8 ſecondi proſſimamente. Queſte coſe ſiano qui dette di paſſaggio, e per eſercizio di calcolo ſulle frazioni continue.

CAPO TERZO.

Della Sommazione delle ferie, e del loro termine generale.

Claſſi diverſe, ed eſpreſſioni generali delle ſerie.

82. NE' due precedenti capi s'è data una ſufficiente idea delle ſerie, che naſcono dalla Evoluzione delle quantità algebraiche; non ci reſta altro a fare per una compiuta trattazione delle ſerie, che moſtrare il metodo per trovare, data una ſerie, il ſuo termine generale, e dato, o trovato il termine generale, trovare la generale ſomma della medeſima. E' però da ſaperſi avanti ogn'altra coſa; 1.° Che dagli Annaliſti ſi chiama *funzione* d'una quantità, qualunque algebraica eſpreſſione comunque compoſta da quella, e da altre quantità, o date, o preſe ad arbitrio; così $a + 3z$, $a + 4z$, $az \pm b\sqrt{a^2 - z^2}$ ſono funzioni di z.

2.° Che per *termine generale* d'una ſerie intendiamo qui una funzione di m tale, che ſe invece di m vi ſi ſoſtituiſcano ſucceſſivamente i termini 1 . 2 . 3 ..... m della ſerie naturale, ſi avrà ſucceſſivamente il primo, il ſecondo, il terzo, l'$m^{eſimo}$ termine della ſerie data.

3.° Che *ſomma generale* d'una ſerie, ſignifica parimenti una funzione di m tale, che ſe invece di m vi ſi ſoſtituiſcano ſucceſſivamente i termini 2 . 3 ..... m della ſerie naturale, ſi avrà ſucceſſivamente la ſomma de' primi due, de' primi tre, de' termini m della ſerie data.

83. Ciò ſuppoſto: Conviene diſtinguere le ſerie ſommabili dalle non ſommabili; dacchè d'infinite ſerie non ſi può trovare

la

la somma esatta, ma solo per approssimazione; queste richiedono un trattato a parte, e si conoscerà quali esse sieno dal non potersi col metodo, che esporrò, trovare la loro somma vera. Quanto alle serie sommabili, a tre classi, o generi si riducono quelle, che più comunemente sono usate ne' calcoli.

Il primo genere comprende tutte le serie, chiamate *aritmetiche* per l'analogía, che esse hanno nella loro formazione, colle progressioni aritmetiche; il secondo genere comprende tutte le serie, chiamate *geometriche* per l'analogía, che esse hanno nella loro formazione, colle geometriche progressioni; il terzo comprende tutte quelle, che nascono dalla composizione delle serie, che appartengono agli altri due.

84. Se una data serie sia tale, che, scritti i suoi termini, cominciando dal minimo, uno sotto l'altro in una colonna verticale A, le differenze de' suoi termini, scritte in una colonna B accanto alla prima, siano costanti, quella serie, come è noto, si chiama progressione aritmetica. Quindi hanno tratto il nome di serie aritmetiche quelle serie, in cui non le differenze di A scritte in B, ma le differenze di B scritte in C, o quelle di C scritte in D, o.... ec. sieno costanti; e chiamando serie aritmetiche di primo ordine le semplici progressioni aritmetiche, si sono chiamate serie aritmetiche di secondo, di terzo, di quarto.... ordine le altre serie, secondochè esse avranno le differenze costanti in C, in D, in E.... ec. Le differenze scritte in B si chiamano differenze *prime*, e quelle scritte in C, in D, in E... ec. si chiamano differenze *seconde*, *terze*.... ec. della serie A. Onde le serie, che hanno le differenze n^{esime} costanti, sono serie aritmetiche di ordine n^{esimo}.

85. E' evidente, che la serie $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.....\, m$ è una serie aritmetica di primo ordine; che le potenze seconde di m formano una serie aritmetica di secondo ordine, le terze di m formano una serie aritmetica di terzo ordine; ed in generale, che

le potenze n di m formano una ferie aritmetica di ordine n.
O più generalmente ancora Bm rapprefenta un termine qualunque delle ferie aritmetiche di primo ordine, Cm^2 rapprefenta le ferie aritmetiche di fecondo ordine, Dm^3 quelle di terzo, e Tm^n quelle d'ordine n; e per maggiore generalità ancora, fi potrà aggiungere a ciafcuna di quefte ferie un termine della ferie coftante A.

86. Quindi $A + Bm + Cm^2 + Dm^3 \ldots\ldots Tm^n$ rapprefenta fucceffivamente tutte le ferie aritmetiche fino all' ordine n; cioè i primi due termini $A + Bm$ rapprefenta le ferie aritmetiche di primo ordine; i primi tre quelle di fecondo ordine; e così nel refto.

87. Le ferie geometriche fono ferie di numeri formate dall' addizione de' termini analogi di più progreffioni geometriche; e chiamando ferie geometriche del primo ordine le femplici progreffioni geometriche, le ferie formate dall' addizione de' termini analogi di due, di tre, di quattro, di n progreffioni geometriche, faranno ferie geometriche di fecondo, di terzo, di n ordine.

88. Se H, I, K.... ec. rapprefentino ciafcuno un dato diverfo numero, è noto, che ciafcuno de' H^m, I^m, K^m .... ec. rapprefenterà una progreffione geometrica d'efponente m, formata da' rifpettivi loro numeri prefi per bafe della progreffione; e più generalmente rapprefenteranno qualunque progreffione geometrica, fe ciafcuna di quefte formole fi multiplicheranno per una indeterminata; cioè AH^m, BI^m, CK^m .... ec. faranno le efpreffioni di diverfe progreffioni geometriche, cioè rapprefenteranno indeterminatamente qualunque termine m di diverfe progreffioni geometriche.

89. Quindi $AH^m + BI^m + CK^m + \ldots$ ec. rapprefenta fucceffivamente con termini n le ferie geometriche d'ordine n; cioè il primo termine AH^m rapprefenta le ferie geometriche di primo

mo ordine, i primi due termini $AH^m + BI^m$ rappreſenta le ſerie geometriche del ſecondo ordine, e così nel reſto.

90. E' manifeſto, che $(A + Bm + Cm^2 \ldots\ldots Tm^n)\, H^m$ comprende un' infinità di ſerie del terzo genere, cioè compoſte di ſerie aritmetiche all' infinito diverſe, e di qualunque ſerie geometrica; queſte ſerie ſi chiamano *aritmetico-geometriche*, e l' eſponente del loro ordine, è la ſomma degli eſponenti dell' ordine delle due ſerie. E' facile quindi a formarſi idea delle altre ſerie di terzo genere, infinitamente diverſe all' infinito.

91. Il celebre Moivre chiama ſerie *ricorrenti* tutte le ſerie, i termini delle quali ſono formati da' termini precedenti moltiplicati riſpettivamente da quantità coſtanti. Di queſta natura ſono le ſerie, di cui abbiamo dato fin qui gl' indeterminati termini generali; ci ſarà aſſai utile nel decorſo la dimoſtrazione di queſto teorema.

92. Dico adunque in primo luogo, che le ſerie aritmetiche ſono ſerie ricorrenti. Se $A + B + C + D \ldots\ldots + T$ ſia una ſerie aritmetica di primo ordine, che ha $A + Bm$ per termine generale, ſarà

$$C = 2B - A$$
$$D = 2C - B$$
$$E = 2D - C$$
$$F = 2E - D$$
$$\ldots\ldots \text{ ec.}$$

Se ſia una ſerie aritmetica di ſecondo ordine, che ha termine generale $A + Bm + Cm^2$, ſarà

$$D = 3C - 3B + A$$
$$E = 3D - 3C + B$$
$$F = 3E - 3D + C$$
$$E = 3F - 3E + D$$
$$\ldots\ldots \text{ ec.}$$

Se

Se sia una serie aritmetica di terzo ordine, che ha per termine generale $A + Bm + Cm^2 + Dm^3$, sarà

$$E = 4D - 6C + 4B - A$$
$$F = 4E - 6D + 4C - B$$
$$G = 4F - 6E + 4D - C$$
$$H = 4G - 6F + 4E - D$$
$$\ldots\ldots \text{ ec.}$$

Ed in generale, le serie aritmetiche di ordine n sono serie ricorrenti di ordine $n+1$. Per avere generalmente il termine T, per qualunque ordine n di serie aritmetiche, si scelgano i coefficienti $s, r, q, p \ldots$ ec. per la potenza $n+1$ del binomio $a+b$, ommesso il primo degli estremi, e si prendano termini $n+1$ nella formola

$$T = sS - rR + qQ - pP + \ldots\ldots \text{ ec.}$$

93. Dico in secondo luogo, che le serie geometriche sono serie ricorrenti. Se $A + B + C + D \ldots\ldots + T$, sia una serie geometrica di primo ordine, che ha per termine generale AH^m,

fatto $H = s$, sarà $T = sS$.

Se sia una serie geometrica di secondo ordine, che ha per termine generale $AH^m + BI^m$,

$$\text{fatto } H + I = s$$
$$HI = r$$
$$\text{sarà } T = sS - rR$$

Se sia una serie geometrica di terz' ordine, che ha per termine generale $AH^m + BI^m + CK^m$,

$$\text{fatto } H + I + K = s$$
$$+HI + HK + IK = r$$
$$+HIK = q$$

sarà, alternando i segni, $T = sS - rR + qQ$

Ed in generale le serie geometriche d'ordine n, sono serie ricorrenti del medesimo ordine. Per avere generalmente il T per qualunque ordine n di serie geometriche, si chiami s la somma di tutti i H, I, K, L, M, $N \ldots$ ec.; si chiami r la somma di tutti

tutti i binarj de' medesimi; q la somma di tutti i ternarj....., e così nel resto, sarà, alternando i segni,

$$T = sS - rR + qQ - pP + \ldots \text{ ec.}$$

94. Dico finalmente, che le serie Algebraico-geometriche sono serie ricorrenti.

Se $A + B + C + D \ldots\ldots + T$ sia una serie Algebraico-geometrica di ordine n, si avrà per il T la stessissima formola del num. 92., con questo solo divario, che il termine m^{esimo} della medesima è multiplicato per H^m.

95. Non m'è ignoto, che si può determinare il termine T d'una serie ricorrente d'ordine n con soli $n - 1$ termini precedenti. Vedi Eulero num. 227..... 230. Tom. 1. della più volte citata Introduzione; ma ciò non è contrario alla generale deffinizione, che l'ordine delle serie ricorrenti sia il numero de' termini precedenti, che determinano il seguente; al più si potrà dire, che la stessa serie può considerarsi come ricorrente d'ordine n, e d'ordine $n - 1$.

96. Tutte quasi le serie, che abbiamo dedotte ne' due precedenti capi sono serie ricorrenti di qualche ordine. Noi abbiamo ivi assegnata la legge di dipendenza d'un termine qualunque dagli altri; Si noti, che alcune di quelle serie con qualche trasformazione si riducono a serie ricorrenti aritmetiche. A cagione d'esempio, nel capo secondo (num. 42.) per le frazioni, che hanno al denominatore una quantità della forma $(1 - ix)^{m+1}$, fatto $i = 1$, ed $x = 1$, si avrà una serie della forma seguente

Se $m = 1$, si avrà

$$b + (b + a) + (b + 2a) + (b + 3a) + \ldots \text{ ec.}$$

Se $m = 2$, si avrà

$$c + (c + b) + (c + 2b + a) + (c + 3b + 3a) + \ldots \text{ ec.}$$

Se $m = 3$, si avrà

$$d + (d + c) + (d + 2c + b) + (d + 3c + 3b + a) + \ldots \text{ ec.}$$

Se $m = 4$, si avrà

..... ec.

La

La prima di queſte ſerie rappreſenta generalmente tutte le ſerie aritmetiche di primo ordine ; la ſeconda rappreſenta quelle di ſecondo ordine.... la n^{esima} rappreſenta quelle di ordine n.

97. Si noti di paſſaggio , che nelle ſerie precedenti , a indica l'ultima differenza, che è coſtante ; b indica la prima delle penultime ; c la prima delle antipenultime... ec., come ſi fa manifeſto dal prendere coll' ordine detto al num. 84. le differenze de' loro termini: A cagione d'eſempio per la ſeconda ſerie , ſi avrà

A	B	C
c		
....	b	
$c+b$	....	a
....	$b+a$	
$c+2b+a$	....	a
....	$b+2a$	
$c+3b+3a$		
... ec.	... ec.	

Trovare la ſomma, ed il termine generale delle ſerie, ſecondo il metodo del P. Riccati.

98. NEl cercare la ſomma, ed il termine generale delle ſerie, mi ſono appigliato al metodo, che il P. Riccati ha così elegantemente eſpoſto nel ſuo tanto inſigne Commentario *de ſeriebus recipientibus ſummam Algebraicam*, *aut exponentialem*. Ho trovato vero in pratica, ciocchè egli accenna nella ſua prefazione , cioè , che il ſuo metodo determina tutte le ſerie propoſte da' più celebri Autori, che hanno trattata queſta materia, ed all' incontro ſi determinano col metodo medeſimo molte altre ſerie , delle quali non ſi ſaprebbe trovare la ſomma coi metodi altrui. Vedi Eulero , Mayer, Stirling, ec.

Sta-

Stabilito, che avrò l'universale principio del P. Riccati, discenderò ad applicare il suo metodo alle serie aritmetiche, quindi alle geometriche, e finalmente alle serie composte di amendue.

99. Il principale artificio del P. Riccati è di assumere varie formole, che indeterminatamente rappresentino le somme generali delle serie, e dalla loro contemplazione dedurne le condizioni, che devono avere i loro termini generali, perchè da essi si possa rimontare alle somme cercate. Mette egli per base di tutte le sublimi sue inquisizioni il seguente semplicissimo teorema: In qualunque serie il termine generale è eguale alla somma di tutti i termini fino ad m *inclusive*, meno la somma di tutti i termini, inclusivamente fino al termine $m-1$; cioè chiamando T il termine m^{esimo}, S la somma de' termini m, ed s la somma de' termini $m-1$, si ha $T=S-s$.

100. Si noti: 1.° Che quantunque sia $T=S-s$, se si trovi $T=A-a$, non si dovrà perciò conchiudere, che A sia la vera somma, o che sia $A=S$, comunque A, ed a siano funzioni di m; così si ha $\frac{6m-5}{2}=\frac{3m^2-1}{2}-\frac{3(m-1)^2-1}{2}$, eppure $\frac{3m^2-1}{2}$ non è la somma della serie, che ha $\frac{6m-5}{2}$ per termine generale.

2.° Si può facilmente conoscere, se A è la vera somma, anzi facilmente si può ridurre A ad essere la vera somma, quando nol sia. Si faccia $m=1$ tanto in T, quanto in A, cosicchè s'abbia T', ed A'; Se $T'-A'=0$, sarà $A=S$. Se $T'-A'=b$, sarà $A+b=S$; nel precedente esempio si ha $T'=\frac{2}{2}$, ed $A'=1$; donde $S=\frac{3m^2-1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3m^2}{2}$.

3.° Fin-

3.° Finchè il T ha la forma di $S - s$, la formola non può servire all'uso, dacchè venendo s dalla sostituzione di $m - 1$ invece di m in S, la serie formata da T sarà composta di due, ed il termine m^{esimo} della prima eliderà il termine $(m+1)^{esimo}$ della seconda; onde non rimarrà, che l'ultimo termine della prima serie meno il primo termine della seconda; ciocchè ciascuno potrà vedere formando la serie, che ha per somma $\frac{m}{2+m}$, fatto

$$T = S - s = \frac{m}{2+m} - \frac{m-1}{1+m}.$$

101. Posti questi principj prendiamo col P. Riccati ad esaminare la seguente formola $S = Am + Bm^2 + Cm^3$ ..... ec.

1.° Se $S = Am$, mettendo $m - 1$ invece d'm in S, si ha $s = Am - A$, e pel teorema $T = S - s = A$; ognun vede, che non entrando l'm in questo termine generale, egli rappresenterà una serie di quantità costanti A, A, A .... ec., la somma della quale è lo stesso Am.

2.° Se $S = Am + Bm^2$, mettendo $m - 1$ invece di m in S, si avrà

$$\begin{aligned} s = & -A + Am \\ & + B - 2Bm + Bm^2; \end{aligned}$$

e, pel teorema, sarà $T = \begin{matrix} A \\ -B + 2Bm \end{matrix}$

Formando la serie corrispondente a questo T colla sostituzione di 1; 2; 3 ... ec. invece di m, si ha $A + B$; $A + 3B$; $A + 5B$; ... ec., che è una progressione aritmetica di differenza costante $2B$, o una serie aritmetica di primo ordine; dunque $\begin{matrix} A \\ -B + 2Bm \end{matrix}$ è la forma, che deve avere il termine generale di questa serie, perchè la loro somma sia rappresentata da S; cioè deve contenere una parte costante $A - B$, ed un'altra $2Bm$ multiplicata per m lineare; allora $Am + Bm^2$ rappresenterà la

loro

loro somma; e di più, se un dato termine generale abbia la forma del nostro, paragonando la parte costante con $A-B$, e la parte multiplicata per m con $2Bm$, si determineranno gli A, B da sostituirsi in S per avere la somma vera. Anzi data una serie aritmetica di primo ordine, supponendo eguale il primo suo termine ad $\begin{matrix}+A\\ -B+2B\end{matrix}$, (posto $m=1$), ed il secondo della serie al medesimo $\begin{matrix}+A\\ -B+2Bm\end{matrix}$, (fatto $m=2$), si avranno tante equazioni quante indeterminate, ed i loro valori sostituiti in S, T, daranno la somma vera, ed il vero termine generale della data serie.

3.° Se $S=Am+Bm^2+Cm^3$; allo stesso modo colla sostituzione di $m-1$ invece di m in S, si avrà

$$T=\begin{matrix}A\\ -B+2Bm\\ +C-3Cm+3Cm^2\end{matrix};$$

e determinando la serie di questo T, si avrà $A+B+C$; $A+3B+7C$; $A+5B+19C$;... ec., che è una serie aritmetica di second' ordine, che ha la seconda differenza costante $6C$; dunque la forma del nuovo T è la forma, che deve avere il termine generale di queste serie, perchè il primo S rappresenti la loro somma; e di più, se un dato termine generale avrà la predetta forma, cioè una parte $A-B+C$ costante, una parte distinta da m, come $2Bm-3Cm$, ed una terza parte $3Cm^2$ distinta da m^2; colle equazioni formate dal paragone rispettivo di queste tre parti, si determineranno gli A, B, C da sostituirsi in S per avere la somma, che corrisponde al dato T. Anzi data una serie aritmetica di second' ordine, paragonando il primo termine della data serie con questo T (in cui si faccia $m=1$), il secondo della serie col T (supposto $m=2$), il terzo della serie col medesimo T (posto $m=3$), si avranno tante equazioni, quante

ne abbisognano per determinare gli A, B, C da sostituirsi in T, ed S per avere la somma, ed il termine generale della serie proposta.

4.° Collo stesso discorso, considerando quattro, cinque..... termini di quel primo S della formola, si determineranno le condizioni, che devono avere i termini generali, perchè da quegli S siano rappresentate le somme delle loro serie, e si dedurrà il metodo per avere la somma, ed il termine generale delle serie di differenze terze, quarte.... costanti.

102. Quindi si può dire generalmente, che le serie ricorrenti aritmetiche d'ordine n hanno per termine generale una funzione di m, in cui m è alzata alla potenza n; e che le serie, il cui termine generale è una funzione di m, nella quale m è alzata alla potenza n, ha per somma generale una funzione di m, che ha per esponente massimo $n+1$. Da queste due considerazioni si ha un metodo universale, e facile per la pratica.

1.° Data una serie, in cui la differenza n^{esima} è costante, trovare il termine generale della medesima. Si prenda indeterminatamente $T = A + Bm + Cm^2 + Dm^3 \ldots\ldots + Lm^n$; fatto m successivamente eguale ad 1; 2; 3;... ec., si paragoni successivamente l'indeterminato T col primo, secondo, terzo..... termine della data serie, fino ad avere tante equazioni, quante sono le indeterminate in T; si sostituiscano i valori di A, B, C .... dedotti da queste equazioni, in T.

2.° Dato (o trovato) il termine generale d'una serie di differenza n^{esima} costante, trovare la somma generale della medesima. Si prenda indeterminatamente $S = Am + Bm^2 + Cm^3 \ldots + Lm^{n+1}$; si determini colla sostituzione di $m-1$ invece di m un nuovo valore $T = S - S'$; col paragone delle parti di questo T colle parti rispettive del dato termine, si avranno tante equazioni, quante sono le indeterminate in T, ed i loro valori sosti-

ſtituiti in S, daranno la ſomma generale della ſerie, di cui ſi ſuppone dato il termine generale.

103. Quanto alle ſerie ricorrenti geometriche, ſi conſideri la formola $S = AH^m - A$; ſoſtituito $m-1$ invece di m, ſi ha

$$s = AH^{m-1} - A$$

$$\text{donde } T = S - s = (AH^m - A) - (AH^{m-1} - A)$$

$$= \frac{A.\overline{H-1}}{H} H^m.$$

Se H foſſe minore dell' unità, ſi dovrebbe al ſolito, mutare il ſegno d'uno de' fattori. Ognun vede, che queſto termine generale ci dà una ſerie geometrica di primo ordine, e che perciò quando il termine generale dato ſia compoſto d'un fattore della forma H^m, e di un altro della forma $\frac{A.\overline{H-1}}{H}$, eſſo appartiene ad una ſerie geometrica di primo ordine. Paragonando i dati fattori componenti coi noſtri indeterminati, ſi avrà il valore di A, H da ſoſtituirſi in S: Così pure, ſe data la ſerie geometrica, ſi cerchi il termine generale, paragonando l'indeterminato T coi primi due termini della data ſerie, ſi avrà il valore di A, H, da ſoſtituirſi in T.

104. Per le ſerie geometriche di grado più elevato del primo, ſi è già notato, che eſſe ſono un aggregato di ſerie geometriche di primo ordine; Onde 1.º Date le ſerie componenti, la ſomma de' loro termini generali ſarà il termine generale della compoſta.

2.º Dato il termine generale della compoſta, la ſomma delle ſomme generali delle ſue parti (che ſono i termini generali delle ſerie componenti) ſarà la ſomma generale della medeſima.

105. Si dica lo ſteſſo per le ſerie ricorrenti aritmetico-geometriche, adoperando la ſomma, o la multiplicazione delle par-

ti

ti de' termini, e delle fomme generali, fecondocchè effe fono formate colla fomma, o colla multiplicazione di più ferie componenti.

106. Refta a darfi un metodo per trovare il termine generale per le ferie ricorrenti geometriche, ed aritmetico-geometriche data la legge della ferie. 1.º Si dà la legge delle ferie ricorrenti geometriche, quando fi danno i multiplicatori de' termini precedenti al T cercato, ed, effendo quefti multiplicatori la fomma s, i prodotti a due, a due r, i prodotti a tre, a tre q... ec. degli H, I, K, L... ec., che entrano a formare il termine generale $T = AH^m + BI^m + DK^m + \ldots$ ec., fi riduce la quiftione, a fapere feparare da quei prodotti $s, r, q \ldots$ ec. le quantità $H, I, K, L \ldots$ ec. da foftituirfi in T. Quefto però è il notiffimo problema dell' Analifi Cartefiana fciolto da noi in tutta la fua generalità nell' introduzione, e nel capo primo di quefto fecondo libro. Si chiami x il valore di ciafcuna di quelle lettere, m in numero; fe la fomma di quefti x è s, e quella de' loro binarj, ternarj .... fia $r, q, p \ldots$ ec., farà per il num. 101.

$$x^m - s x^{m-1} + r x^{m-2} - q x^{m-3} + p x^{m-4} - \ldots \text{ ec.} = 0,$$

e le radici di quefta equazione faranno i valori cercati.

2.º Per le ferie aritmetico-geometriche, fi chiamino allo fteffo modo $s', r', q', p' \ldots$ ec. i coefficienti di S, R, Q, P avuti nella formola formata al num. 102., ed i valori di

$$x^m - s' x^{m-1} + r' x^{m-2} - q' x^{m-3} + \ldots \text{ ec.} = 0$$

faranno i valori di

$$H, I, K, L, M, N, \ldots \text{ ec.}$$

da foftituirfi in T.

3.º I valori di $A, B, C \ldots\ldots Q, R, S$ fi determineranno in amendue i generi di ferie ricorrenti qui fpiegate, col noto paragone dell' indeterminato T con i primi n termini dati, o af-

funti

ſunti della ſerie di cui vien data la legge. Si noti, che per le ſerie algebraico-geometriche, ſarà $S = (A + Bm + Cm^2 + Dm^3 + Dm^4 \ldots\ldots \text{ec.}) H^m - A$; e che ſe ſia $H = 1$, l'S ſarà la ſomma ſemplici ſerie aritmetiche.

107. Una ſola è la difficoltà, che s'incontra nell' uſo delle precedenti equazioni. Siano dati i primi due termini 1. 1 d'una ſerie ricorrente del ſecondo ordine, e tale, che per avere un altro qualunque termine, ſia neceſſario ſommare il primo termine precedente multiplicato per 3 col ſecondo precedente multiplicato per $-\frac{9}{4}$; quale ſarà la forma del ſuo termine generale? Avrà egli la forma d'una ſerie geometrica, o d'una ſerie aritmetico-geometrica? In queſto, ed in ſomiglianti caſi, ſi ſciolga l'equazione $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$, ſi avrà $x = \frac{3}{2}$, $x = \frac{3}{2}$; cioè ſi avranno due radici eguali; queſto è ſegno, che il cercato termine generale non può avere la forma $AH^m + BI^m$, ma ſolamente la forma $(A + Bm) H^m$, cioè ſarà $T = (A + Bm) \left(\frac{3}{2}\right)^m$. Se ſi ſoſtituiſce $\frac{3}{2}$ invece di H, I in $AH^m + BI^m$, ſi avrebbe $\left(\frac{3}{2}\right)^m A + \left(\frac{3}{2}\right)^m B$, donde $1 = \frac{2}{3}$, che è un aſſurdo.

108. Baſti il detto fin qui ſulle ſerie ricorrenti, cioè ſulle ſerie aritmetiche, ſulle ſerie geometriche, e ſulle ſerie compoſte da queſte due. Per le ſerie, che non ſono ricorrenti, io ne produrrò d'una ſola ſpecie, che ne abbraccia infinite ſubalterne. Chi deſideraſſe una più preciſa notizia ſu altre ſerie più intralciate, legga il citato Commentario. Contempliamo intanto la formola

$$S = \frac{Lm + Mm^2 + Nm^3 \ldots\ldots + Rm^{p-1} + Sm^p}{(A + Bm)(A + B\overline{m-1}) \ldots\ldots (A + B.\overline{m-p+2})(A + B.\overline{m-p+1})}$$

So-

Sostituendo $m-1$ invece di m, si avrà

$$s=\frac{L\overline{m-1}+M.\overline{m-1}^2+N.\overline{m-1}^3\ldots+R.\overline{m-1}^{p-1}+S\overline{m-1}^p}{(A+B.\overline{m-1})(A+B.m-2)\ldots(A+B.\overline{m-p+1})(A+B.\overline{m-p})}$$

Per sottrarre l's dall'S, si multiplichino i termini della frazione S per $A+B.\overline{m-p}$, ed i termini della frazione s per $A+Bm$; fatta la riduzione, non si avrà più il T sotto la forma di $S-s$, ma chiamando $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ nel secondo membro delle seguenti equazioni tutto il secondo fattore del primo membro, sarà il numeratore di T.

$$(A+B.\overline{m-p})\left\{\begin{matrix}L\,m+M\,m^2 & +N\,m^3\ldots\\ \ldots.+R\,m^{p-1} & +S\,m^p\end{matrix}\right\}=(A+B\,m-B\,p)\,\mathfrak{Q}$$

$$-(A+Bm)\left\{\begin{matrix}L.\overline{m-1}+M.\overline{m-1}^2 & +N.\overline{m-1}^3\\ \ldots\ldots\ldots+R.\overline{m-1}^{p-1} & +S.\overline{m-1}^p\end{matrix}\right\}=(A+Bm).(-\mathfrak{Q}')$$

ed il denominatore

$$D=(A+Bm)(A+B.\overline{m-1})\ldots(A+B.\overline{m-p+1})(A+B.m-p)$$

E' manifesta la legge, con cui va decrescendo il denominatore di T. Per conoscere la legge, che regna nel numeratore, è evidente, che egli è eguale a

$$(A+B\,m)(\mathfrak{Q}-\mathfrak{Q}')-B\,p\,\mathfrak{Q}$$

cioè eguale ad $A(\mathfrak{Q}-\mathfrak{Q}')+B\,m(\mathfrak{Q}-\mathfrak{Q}')-B\,p\,\mathfrak{Q}$; ed essendo

$$\left\{\begin{array}{ll}L.(m-\overline{m-1}) & =-L\\ M.(m^2-\overline{m-1}^2) & =-M+2\,Mm\\ N.(m^3-\overline{m-1}^3) & =+N-3\,Nm+3\,Nm^2\\ \vdots & \\ R.(m^{p-1}-\overline{m-1}^{p-1}) & =\pm R\mp\frac{\overline{p-1}}{1}R\,m\pm\frac{\overline{p-1}.\overline{p-2}}{1\,.\,2}R\,m^2\ldots\\ S.(m^p-\overline{m-1}^p) & =\mp S\pm\frac{p}{1}S\,m\mp\frac{p.\overline{p-1}}{1\,.\,2}S\,m^2\ldots-p\,S\,m^{p-1}\end{array}\right.$$

eguale

eguale a $\mathfrak{Q}-\mathfrak{Q}'$, sostituendo questo valore di $\mathfrak{Q}-\mathfrak{Q}'$ nel numeratore $(A+Bm)(\mathfrak{Q}-\mathfrak{Q}')-Bp\mathfrak{Q}$ si vedrà anche in questo la costante legge de' suoi termini.

109. 1.º Ciascun fattore del denominatore di T è il termine generale d'una serie aritmetica di primo ordine. La serie aritmetica del secondo fattore $A+B.\overline{m-1}$ non è diversa dalla serie del primo fattore $A+Bm$, se non in questo, che il primo termine della serie del secondo fattore, è il secondo termine della serie del primo fattore; e così la serie del terzo fattore, comincia dal secondo termine della serie del secondo fattore, la serie del quarto fattore comincia dal terzo del terzo fattore... ec.

2.º Il denominatore di T è lo stesso, che il denominatore di S.
3.º Fatto il numero de' fattori del denominatore eguale a $p+1$, l'esponente massimo di m nel numeratore di T è $p-1$, cioè minore di due unità del numero de' fattori.
4.º Dato qualunque termine generale, che abbia le tre precedenti proprietà, si troverà il numeratore della somma generale paragonando colla formola il dato numeratore; e conseguentemente se il termine generale d'una serie abbia le condizioni del nostro, si troverà sempre la somma generale della serie medesima.

110. Perchè sia più spedita la determinazione della somma generale delle serie, i cui termini generali hanno la forma del numero precedente; 1.º Fatto il numero de' fattori del denominatore D eguale ad r, si supponga

$$S=\frac{Lm+Mm^2+Nm^3\ldots\ldots+Sm^r}{D};$$

2.º Determinato s colla sostituzione di $m-1$ invece d'm in S, si riducano gli S, s allo stesso denominatore, cosicchè si abbia S', s'; sarà $T=S'-s'$.

 3.º Pa-

3.° Paragonando i termini di T con quegli del dato termine generale si avranno i valori di L, M, N... ec.

111. L'uso del calcolo farà svanire certe difficoltà, che forse fa nascere la semplice enunciazione del metodo.
Se nel denominatore D non si succedano i fattori, come in T del num. 108.; ma manchino alcuni fattori intermedj, si moltiplichi il numeratore, ed il denominatore del dato termine generale per i fattori, che mancano. Se...... ec.

Osservazioni sul metodo del P. Riccati.

112. IL metodo del P. Riccati, tuttocchè elegante, semplice, ed universale, sembra a primo aspetto alquanto prolisso, e tedioso nella sua applicazione. Quasi sempre, è vero, si hanno a sciogliere equazioni solamente di primo grado; ma per ogni nuova serie pare sia uopo ripetere le stesse operazioni, di sottrazioni d'un' equazione dall' altra, di moltiplicazioni......, con facile pericolo di errare ne' calcoli, e nelle frequenti sostituzioni. Non è però così in fatti a chi vi si metta di proposito, e si renda per qualche tempo famigliari gli artificj, che per entro vi sparge il suo autore; anzi nel rimirare partitamente le formole, che si deducono da quel metodo ne' casi particolari, si accorgerà chicchessia, che si possono essa generalizzare assai, e farle servire per infiniti altri casi simili. Il P. Riccati non ha voluto dedurre questi compendj, che ben vedeva contenersi nel suo metodo, o per non dilungarsi troppo dal suo fine, o per lasciare a chi leggesse il Commentario con attenzione, il piacere di dedurseglì da se. Io esporrò le osservazioni, che ho fatte sul metodo del P. Riccari, per renderlo più semplice, e più facile ad applicarsi alle serie di qualunque genere, ed insieme scioglierò qualche interessante problema sulle serie medesime. Incominciamo dalle serie aritmetiche.

113. Le

113. Le progressioni aritmetiche, che sono le serie aritmetiche di primo ordine, hanno, come detto è al num. 87. la forma b; $b+a$; $b+2a$; $b+3a$.... ec.; e le serie aritmetiche di secondo ordine, hanno la forma c; $c+b$; $c+2b+a$; $c+3b+3a$.... ec. Col metodo del P. Riccati si ha per termine generale, e per somma generale di queste due serie

Per la prima...... $T = b - a + am$

$S = bm - \frac{1}{2}am + \frac{1}{2}am^2$

Per la seconda.... $T = c - b + bm + a - \frac{3}{2}am + \frac{1}{2}am^2$

$S = cm - \frac{1}{2}bm + \frac{1}{2}bm^2 + \frac{1}{3}am - \frac{1}{2}am^2 + \frac{1}{6}am^3$

114. Cerco se questi due T, ed S seguitino qualche legge costante nella loro formazione, ed osservo, che nel primo T la parte $-a+am$ è eguale ad $\overline{m-1}\,.\,a$; onde per le serie aritmetiche di primo ordine si ha $T = b + \frac{m-1}{1}\,.\,a$, come al num. 81. del libro primo.

La seconda formola di T è composta d'una parte, che ha la stessa forma della precedente, cioè $c-b+bm$, e di un' altra,

 in

in cui non c'entrano, che gli m, e gli a; perciò si avrà la prima parte ridotta a $c + \frac{m-1}{1} b$, e la seconda $\frac{1}{2} a m^2 - \frac{3}{2} a m + a = \frac{1}{2} a m^2 - \frac{3}{2} a m + \frac{2}{2} a$; non considerando per ora il comune denominatore 2 di questa seconda parte, si ha $am^2 - 3am + 2a = (m^2 - 3m + 2) a = \overline{(m-1 \cdot m-2)}\, a$; e la seconda parte della formola di T, sarà $\frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2} a$; cioè per le serie aritmetiche di second'ordine, sarà

$$T = c + \frac{m-1}{1} b + \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2} a.$$

115. Si sono adunque ridotti que' due T trovati col metodo del P. Riccati ad avere per coefficienti de' termini i coefficienti numerici della formola delle potenze d'un binomio; innoltre in amendue i T così disposti l'a sta sempre al primo termine verso destra, e verso la sinistra succedono negli altri termini il b, ed il c; finalmente il numero de' termini in ciascun T è eguale ad $n + 1$. Se queste osservazioni sono generalmente vere per tutti i T delle altre serie aritmetiche, per le serie aritmetiche di terzo ordine, si avrà

$$T = d + \frac{m-1}{1} c + \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2} b + \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3} a.$$

E di fatti tanto coll'applicare il metodo del P. Riccati all'espressione generale di queste serie d; $d + dc$; $d + 2c + b$; $d + 3c + 3b + a$; ... ec., quanto facendo le multiplicazioni indicate nel proposto valore di T; si ha sempre

$$\frac{d - c + cm}{1} + \frac{bm^2 - 3bm + 2b}{2} + \frac{am^3 - 6am^2 + 11am - 6a}{6}$$

Lo

Lo ſteſſo avverrebbe in tutte le altre eſpreſſioni generali delle ſerie aritmetiche di qualunque ordine; maſſimamentecchè ſi moſtra una ſpecie d'analogía trai coefficienti delle lettere ne' termini delle ſerie aritmetiche, ed i coefficienti de' termini delle potenze; così nell' eſpreſſione delle ſerie aritmetiche di terz' ordine, i coefficienti del terzo termine $d + 2c + b$ ſono i coefficienti del quadrato d'un binomio; i coefficienti del quarto termine ſono i coefficienti del cubo... ec.

116. Con ſimili rifleſſioni fatte ſulle formole delle ſomme generali, ſi ha per le ſerie aritmetiche

di primo ordine

$$S = \frac{m}{1} b + \frac{m \cdot \overline{m-1}}{1 \cdot 2} a$$

di ſecond' ordine

$$S = \frac{m}{1} c + \frac{m \cdot \overline{m-1}}{1 \cdot 2} b + \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} a$$

di terz' ordine

$$S = \frac{m}{1} d + \frac{m \cdot \overline{m-1}}{1 \cdot 2} c + \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} b + \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\overline{m-3}}{4} a.$$

...... ec.

117. Dalla ſola iſpezione di queſte formole, e dal num. 97. ſi ha un metodo facile per trovare il termine generale, e la ſomma generale d'una ſerie aritmetica di qualunque ordine. Si prendano come al num. 97. le differenze prime, ſeconde, ... $n^{eſime}$ della data ſerie; chiamando a il primo termine della colonna A, chiamando b il primo termine della colonna B, chiamando c il primo termine della colonna C.... ec.; ſi ha

T

$$T = a + \frac{m-1}{1} b + \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2} c + \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3} d$$
$+ \ldots\ldots$ ec.

$$S = \frac{m}{1} a + \frac{m \cdot \overline{m-1}}{1 \cdot 2} b + \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} c + \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot$$
$$\frac{\overline{m-3}}{4} d + \ldots\ldots, \text{ ec.}$$

118. A fare meglio ſentire l'utilità delle due precedenti formole, gioverà l'eſempio ſeguente. Si cerchi il termine generale, e la ſomma generale della ſerie aritmetica 2 ; 9 ; 24 ; 50 ; 90 ; . . . . ec.
Nel metodo del P. Riccati: 1.º Conviene eſaminare, quali ſiano le differenze coſtanti di queſta ſerie; ſi avrà

A	B	C	D
2			
	7		
9		8	
	15		3
24		11	
	26		3
50		14	
	40		
90			
⋮			
ec.			

cioè le differenze terze ſono coſtanti.
2.º La formola del termine generale per le ſerie di terze differenze coſtanti è $A + Bm + Cm^2 + Dm^3$; che mettendo $m = 1$ rappreſenterà il primo termine 2 della ſerie data; mettendo $m = 2$ rappreſenterà il ſecondo termine 9... ec.; ſi avrà dunque

$$A + B + C + D = 2$$
$$A + 2B + 4C + 8D = 9$$
$$A + 3B + 9C + 27D = 24$$
$$A + 4B + 16C + 64D = 50$$

3.º Diſpo-

3.° Disponendo per ordine le differenze di queste equazioni; cioè sottraendo la prima dalla seconda, la seconda dalla terza, e la terza dalla quarta, si ha

$$B + 3C + 7D = 7$$
$$B + 5C + 19D = 15$$
$$B + 7C + 37D = 26$$

Le differenze di queste tre equazioni, danno

$$2C + 12D = 8$$
$$2C + 18D = 11$$

Le differenze di queste due, danno finalmente $D = \frac{1}{2}$.

4.° Rimontando da questo valore di D ai valori di C, B, A colle solite sostituzioni, si ha $A = 0$ $C = 1$

$$B = \frac{1}{2} \quad D = \frac{1}{2}$$

donde si avrà $T = \frac{1}{2}m + m^2 + \frac{1}{2}m^3$.

119. Per trovare S, si scelga la formola $Am + Bm^2 + Cm^3 + Dm^4$; 1.° Sostituendo $m - 1$ invece di m, e sottraendo la nuova formola dalla formola assunta, si ha

$$\begin{array}{l} A \\ -B + 2Bm \\ +C - 3Cm + 3Cm^2 \\ -D + 4Dm - 6Dm^2 + 4Dm^3 \end{array}$$

2.° Paragonando il termine, che non contiene l'm col termine, che non ha l'm di T, cioè con zero, e ciascuno degli altri col suo corrispondente in T; si ha

$$A = \frac{5}{12} \quad C = \frac{7}{12}$$

$$B = \frac{7}{8} \quad D = \frac{1}{8}$$

donde

donde si avrà $S = \frac{5}{12} m + \frac{7}{8} m^2 + \frac{7}{12} m^3 + \frac{1}{8} m^4$.

120. Tale è il metodo del P. Riccati ; usando le formole del num. 117. basta trovare le differenze della data serie, che è il primo passo del metodo precedente, e si avrà

$$a = 2 \qquad c = 8$$
$$b = 7 \qquad d = 3$$

fatte le sostituzioni in T, ed S, sarà

$$T = 2 + \frac{m-1}{1} \cdot 7 + \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2} \cdot 8 + \frac{\overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3$$

$$S = \frac{m}{1} \cdot 2 + \frac{m \cdot \overline{m-1}}{1 \cdot 2} \cdot 7 + \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 8 + \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2} \cdot \overline{m-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 3$$

Tutti gli altri termini de' T, S indeterminati svaniscono per essere uno de' loro fattori, e, f, g.... ec. eguale a zero.

121. Le formole del num. 117. mutando alcune denominazioni, e componendo i coefficienti delle lettere, che distinguono ciascun termine, si riducono alle formole del Goldbacchio (Atti di Lipsia 1720.). Aveva certamente in vista queste formole il P. Riccati, quando disse nella prefazione del suo Commentario; *Regulae, quam sine demonstratione attulit Goldbacchius, neque apparet unde deduxerit, in mea methodo genuinum fundamentum habebis*. Confesso sinceramente, che, prima di pensare a Goldbacchio, dalla sola applicazione del metodo del P. Riccati alle generali espressioni delle serie aritmetiche, io m'era dedotte le predette formole, e che leggendo poi a caso la memoria del Goldbacchio, a mala pena mi sono accorto, che le sue formole si potevano ridurre alle mie. Io non so come siasi mai egli indotto quest'autore a mettere l'*eccettera* dopo cinque termini

mini della sua formola, non iscoprendosi all' occhio nessuna legge de' coefficienti. Restano adunque in quest' articolo dimostrate, e dedotte dal metodo del P. Riccati anche le formole del Goldbacchio.

122. Ciocchè s'è fatto per le serie aritmetiche, si può parimenti stendere alle serie geometriche, ed alle composte d'amendue. Si multiplichino le formole aritmetiche del num. 87., termine per termine, coi termini di varie progressioni geometriche indeterminate, e prese dal num. 84. del libro precedente; alle nuove formole, che si avranno da queste multiplicazioni, si applichi successivamente il metodo del P. Riccati, e si avrà la costante legge per trovare senz' altro calcolo il T, e l'S. Noto però, che fatto il calcolo, non ho trovate formole tanto eleganti, quanto per le serie aritmetiche; ma sono tali, per cui si schivano varie equazioni di terzo grado, e di grado più elevato, che sono inevitabili nel metodo del P. Riccati in varie serie geometriche. Noi passiamo oltre a cose più interessanti.

Passaggio dalle serie interrotte alle serie continuate.

123. IO chiamo *serie interrotta* una serie A' formata da termini presi ad eguali intervalli di termini r, in una data serie qualunque A; e questa serie A la chiamo serie continuata. Il problema, che prendo a sciogliere nel presente articolo è il seguente: *Data la legge, che regna in una serie qualunque interrotta, o aritmetica, o geometrica, o comunque composta da queste due, trovare il* T, *e l'*S *della sua continuata.*

124. La soluzione di questo problema, dipende da uno de' seguenti due teoremi.

Teorema primo. Il termine m^{esimo} d'una serie interrotta A' è l'$(\overline{m-1} \cdot r + m)^{esimo}$ della sua continuata A.

 Teo-

Teorema ſecondo. Il termine m^{esimo} d'una ſerie continuata A è l' $\frac{m+r}{r+1}^{esimo}$ della ſua interrotta A'.

Il primo teorema è manifeſto dalla formazione della ſerie A'. Per avere il ſecondo termine di A', ſi deve ommettere dopo il primo termine di A un numero r di termini; cioè il ſecondo termine di A' è l' $(1+\overline{r+1})^{esimo}$ di A; per avere il terzo termine di A', ſi deve ommettere un altro numero r di termini dopo l' $(1+\overline{r+1})^{esimo}$ di A; cioè il terzo termine di A' è l' $(1+\overline{r+1}+\overline{r+1})^{esimo}$, oſſia il $(2r+3)^{esimo}$ di A; così il quarto di A' ſi troverà eſſere il $(3r+4)^{esimo}$ di A, e da qui già ſi conoſce generalmente, che l' m^{esimo} di A' è l' $(\overline{m-1}.r+m)^{esimo}$ di A.

Il ſecondo teorema ſi deduce facilmente dal primo. Si chiami m la claſſe del termine m^{esimo} della ſerie continuata, ed m' quella del termine m^{esimo} della interrotta; Sarà per il teorema precedente $m'=\overline{m-1}.r+m=mr+m-r=\overline{r+1}.m-r$;

donde $m'+r=\overline{r+1}.m$, cioè $m=\frac{m'+r}{r+1}$.

Si noti, che, nelle due formole precedenti l'm, e l'm' indicano ſempre lo ſteſſo numero; non s'è poſto l'accento al ſecondo m, che per diſtinguere l'm della ſerie continuata dall' m della interrotta.

125. E' più ſpedito l'uſo del ſecondo teorema per la ſoluzione del problema propoſto. Si cerchi il T, e l'S della data ſerie interrotta A', come ſe foſſe una ſerie continuata; invece di m, ſi ſoſtituiſca in amendue il numero $\frac{m+r}{r+1}$; ſi avrà il T, e l'S della continuata A.

Sia

Sia data, a cagione d'esempio, la serie geometrica A . . . . 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 . 64 . . . ec.; da questa serie se ne formi un' interrotta, con ommettere successivamente due termini dopo il primo; si avrà la serie A' . . . . . 1 . 8 . 64 . . . ec. Il problema si riduce a trovare l'S, ed il T di A, posto, che si conosca unicamente la serie A', ed il numero r de' termini ommessi in A per formarla. Già si sa, che il termine generale di A' è 8^{m-1}; invece di m si scriva il numero $\frac{m+r}{r+1}$, cioè, nel caso nostro, si scriva $\frac{m+2}{3}$, e si avrà $8^{\frac{m+2}{3}-1} = 8^{\frac{m-1}{3}}$ per termine generale della serie continuata A; e di fatti $8^{\frac{m-1}{3}}$ è eguale a 2^{m-1}, che altronde si sa essere il termine generale di A; lo stesso dicasi per l'S.

126. Uso del primo teorema. Sia data la serie interrotta di qualunque genere:

1 . . A' . . . . . f . * . * . g . * . * . h . * . * . i . * . * . k . . . . . . ec.

gli asterisci (che dovrebbero essere r in numero) posti tra un termine, e l'altro di questa serie A', tengono luogo de' termini, r in numero, che si suppongono ommessi nella serie incognita A, per formare la serie data.

1.° Si prenda indeterminatamente il termine generale per le serie d'ordine n della classe della data A; in questo T, si sostituisca invece di m il numero $\overline{m-1} . r + m$, e fatto questo nuovo m successivamente eguale ad 1 . 2 . 3 . 4 . . . . ec., si supponga T eguale al primo, al secondo, al terzo . . . . termine di A'. Con queste equazioni si determineranno i valori delle indeterminate del primo assunto T, che sostituiti nel T medesimo daranno il termine generale cercato.

2.° Avuto il termine generale di A per mezzo della serie A', si avrà coi metodi già spiegati, ancora l'S di A.

 127. Sia,

127. Sia, a cagione d'esempio, la data serie A' una serie interrotta di una serie aritmetica, continuata A, d'ordine n, il termine generale della quale è $T = a + \frac{m-1}{1} b + \frac{\overline{m-1} . \overline{m-2}}{1 . 2} c + \ldots$ ec.

E' evidente 1.° , che questo T sarà eguale al primo dato termine f, se si supponga $m = 1$; sarà eguale a g, se si supponga (per il teor. 1.°) $m = r + 2$; sarà eguale al terzo h, se si supponga $m = 2r + 3$; ... ec. Cioè i valori di m in T formeranno una progressione aritmetica, che incomincia da $r + 2$, ed ha per differenza costante la quantità $r + 1$.

2.° Se la serie continuata è di differenze prime costanti, anche la data serie interrotta avrà le differenze prime costanti: Se la serie continuata è di differenze seconde costanti, anche la serie interrotta avrà le differenze seconde costanti; .... cioè l'ordine della serie continuata sarà l'ordine della interrotta.

3.° Se la serie continuata ha le differenze n^{esime} costanti, s'arriverà alle differenze costanti anche nella interrotta con $n + 1$ termini.

4.° La formola T, che rappresenta ciascun dato termine dopo le sostituzioni de' valori rispettivi di m, si romperà dopo due termini se $n = 1$, dopo tre termini se $n = 2$, dopo $n + 1$ termini per le differenze n^{esime}.

128. 1.° Adunque si avrà per il T di ciascun dato termine di A'.

$$f = a$$

$$g = a + \frac{r+1}{1} b + \frac{\overline{r+1} . \overline{r+0}}{1 . 2} c + \frac{\overline{r+1} . \overline{r+0} . \overline{r-1}}{1 . 2 . 3} d + \ldots \text{ec.}$$

$$h = a + \frac{2r+2}{1} b + \frac{\overline{2r+2} . \overline{2r+1}}{1 . 2} c + \frac{\overline{2r+2} . \overline{2r+1} . \overline{2r+0}}{1 . 2 . 3} d + \ldots \text{ec.}$$

$$k = a + \frac{3r+3}{1} b + \frac{\overline{3r+3}\cdot\overline{3r+2}}{1\ .\ 2} c + \frac{\overline{3r+3}\cdot\overline{3r+2}\cdot\overline{3r+1}}{1\ .\ 2\ .\ 3} d + \ldots \text{ec.}$$

$$i = a + \frac{4r+4}{1} b + \frac{\overline{4r+4}\cdot\overline{4r+3}}{1\ .\ 2} c + \frac{\overline{4r+4}\cdot\overline{4r+3}\cdot\overline{4r+2}}{1\ .\ 2\ .\ 3} d + \ldots \text{ec.}$$

$$l = a + \ldots \text{ ec.}$$

2.º In queſta ſerie d'equazioni ſe ne dovranno prendere due, cominciando da f, ſe $n = 1$; ſe ne dovranno prendere tre, ſe $n = 2$, e per le differenze n^{esime} ſe ne dovranno prendere $n+1$. Il ſecondo membro di ciaſcuna di queſte equazioni, toltane la prima, dovrà ſempre avere un numero $n+1$ termini; cioè ciaſcuna ne avrà tanti nel ſecondo membro, quante ſono le equazioni preſe. Con queſte equazioni ſi determineranno le indeterminate a, b, c.... per ogni caſo.

129. Applico il metodo alle ſerie aritmetiche di terzo ordine. Per queſte non ſi richieggono più di quattro termini f, g, h, k, e le equazioni ſaranno le prime quattro del num. precedente terminate incluſivamente al termine, che contiene il d: prendendo le differenze di queſte equazioni, e le differenze delle differenze,...... come al num. 81, ſi avrà

fatto

A	B	C	D
f			
...	p		
g	...	t	
...	q	...	u
h	...	v	
...	s		
k			

$$a = f$$

$$b = \frac{p}{(r+1)} - \frac{rt}{2(r+1)^2} + \frac{r\cdot\overline{2r+1}\cdot u}{6(r+1)^3}$$

$$c = \frac{t}{(r+1)^2} - \frac{ru}{(r+1)^3}$$

$$d = \frac{u}{(r+1)^3}.$$

130. Quindi ſi formino le quattro colonne A, B, C, D delle differenze de' dati termini interrotti, come al num. 97., e ſi

si chiamino (per tenere denominazioni analoghe a quelle del num. 117.) a', b', c', d' i primi termini delle colonne medesime, e per le serie di differenze terze costanti

fatto $a = a'$.

$$b = \frac{b'}{(r+1)} - \frac{r c'}{2(r+1)^2} + \frac{r \, . \, \overline{2r+1} \, . \, d'}{6(r+1)^3}$$

$$c = \frac{c'}{(r+1)^2} - \frac{r d'}{(r+1)^3}$$

$$d = \frac{d'}{(r+1)^3}$$

sarà $T = a + \frac{m-1}{1} b + \frac{\overline{m-1} \, . \, \overline{m-2}}{1 \, . \, 2} c + \frac{\overline{m-1} \, . \, \overline{m-2} \, . \, \overline{m-3}}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} d.$

131. E' evidente, che se le serie interrotte saranno di secondo ordine, svaniranno nelle formole precedenti il d, e tutte le quantità, nelle quali c'entra d': Se le serie interrotte saranno di primo ordine svaniranno nelle formole precedenti il c, d, e tutte le quantità, ove c'entra c', d'. Quindi

Per le serie di differenze seconde costanti

fatto $a = a'$

$$b = \frac{b'}{(r+1)} - \frac{r c'}{2(r+1)^2}$$

$$c = \frac{c'}{(r+1)^2}$$

sarà $T = a + \frac{m-1}{1} b + \frac{\overline{m-1} \, . \, \overline{m-2}}{1 \, . \, 2} c.$

Per

Per le serie di differenze prime costanti
fatto $a = a'$

$$b = \frac{b'}{(r+1)} \text{ sarà } T = a + \frac{m-1}{1} b$$

132. Se si applicasse il metodo medesimo alle serie aritmetiche d'ordine più elevato del terzo, si troverebbe una costante legge de' valori di a, b, c... ec. Si troverebbe a cagione d'esempio, che disponendo questi valori come al num. 130., dovrebbero corrispondersi nella prima colonna, per numeratori gli a', b', c'... ec.; e per denominatori le potenze $0 . 1 . 2 . 3$ .. ec. di $r+1$ prese per ordine; nella seconda colonna, per numeratori gli $1c'$, $2d'$, $3e'$, $4f'$... ec. ciascuno multiplicato per r, e per denominatori il doppio delle potenze $2 . 3 . 4 . 5$... di $r+1$ prese per ordine; nella terza colonna... ec. In questa guisa si avrebbe poi in generale, e senz'altro calcolo, il valore di ciascuna lettera a, b, c... ec. per le serie aritmetiche d'ordine n; ed ancora d'ogni altra serie.

133. Si noti la differenza de' due metodi precedenti. Nel termine generale, e nella generale somma d'una serie continuata di qualunque genere, per esempio delle serie aritmetiche, entrano due sole indeterminate, cioè gli m, e gli a, b, c... ec. Col primo teorema (num. 124.) si è cercato quali dovessero essere le variazioni degli a, b, c... ec., ed il secondo teorema ci ha date le variazioni degli m, per passare dalle serie interrotte supposte note, alle continuate supposte ancora sconosciute.

Interpolazione delle serie.

134. *Interpolare* una data serie, significa inserire tra due qualunque suoi termini un dato numero r di termini intermedj, che seguano la medesima legge della serie data. Se la

data

data serie è una serie aritmetica di primo ordine, s'è già dato al num. 78. del libro precedente il metodo d'interpolarla; così pure al num. 65. si è esposto il metodo d'interpolare le serie geometriche di primo ordine. Ma oltrecchè que' metodi sono assai faticosi per la pratica, massimamente quando si debba interpolare tutta la serie fino al termine m^{esimo}, il problema, che noi ci proponiamo al presente comprende tutte le serie d'ordine n di qualunque genere, o sommabili, o no, purchè di esse si possa trovare il termine generale.

135. Il problema della interpolazione, non è, a parlare con rigore, che una parte di quello, che abbiamo sciolto nell' articolo precedente. La serie data a interpolarsi corrisponde alla nostra serie interrotta, e la serie, che si avrà dopo l'interpolazione, corrisponderà alla nostra serie continuata. Dico *corrisponderà*, perchè la serie continuata non sarà propriamente la serie interpolata, non cercandosi in tutto coll' interpolazione, che termini $n(r+1)+1$, e col termine generale della serie continuata, si trovano tutti gli altri termini all' infinito; onde il problema dell' articolo precedente è più generale di quello della interpolazione.

136. Si aggiunge, che coll' interpolazione non si cercano il più delle volte tutti i termini della serie interpolata, ma solamente l' s^{esimo} degli r posti fra l' m^{esimo}, e l' $(m+1)^{esimo}$ della serie data. Or chi volesse sciogliere il problema dell' interpolazione col metodo dell' articolo precedente, dovrebbe:

1.º Cercare coi termini della data serie, il termine generale T della corrispondente serie continuata.

2.º Dovrebbe cercare quale termine sia di tutta la serie data, e supposta interpolata l' s^{esimo} cercato.

3.º E finalmente sostituire in T invece di m il numero, che ne indica la classe.

137. Esempio. Si cerchi il termine quinto de' cinque interpolati

polati tra i termini 78., e 300. della ferie aritmetica
$A' \ldots . 0 . 78 . 300 . 666 \ldots$ ec.

1.° Si ha (num. 130.) $TA = \frac{m-1}{1} 3 + \frac{\overline{m-1} . \overline{m-2}}{1 . 2} 4$,

oppure trovato $TA' = \frac{m-1}{1} 78 + \frac{\overline{m-1} . \overline{m-2}}{1 . 2} 144$,

fi ha (num. 125.) $TA = \frac{m-1}{1} 13 + \frac{\overline{m-1} . \overline{m-7}}{1 . 2} 4$.

2.° Il quinto termine cercato trai due della data ferie A' farebbe il dodicefimo della interpolata A; come fi può vedere contando nella ferie A' i dati termini, e gli afterifci, che fi frappongano tra l'uno, e l'altro invece de' termini interpolati.
A 0 . * . * . * . * . * . 78 . * . * . * . * . * . 300 ... ec.
3.° Si dovrà dunque fupporre in uno dei TA trovati, $m = 12$, e fi avrà pel quinto termine cercato 253.
Ciocchè s'è fatto qui per avere il quinto termine de' cinque interpolati tra 78 e 300 di A', è evidente, che fi può egualmente fare per qualunque altro s^{efimo} degli r interpolati tra due qualunque termini di qualunque ferie. Ma ad alcuni fembra nojofo il dovere badare ogni volta a quel valore di m da foftituirfi in TA. Ho penfato perciò di fchivare per l'interpolazione, anche queft' incomodo, col metodo feguente.

138. *Trovare il termine* s^{efimo} *degli* r *interpolati tra il termine* m^{efimo}, *ed* $(m+1)^{efimo}$ *d'una data ferie* A'.
1.° Si cerchi il termine generale T di A'. 2.° Si foftituifca in T il numero $m + \frac{s}{r+1}$ invece di m.

Così per avere il quinto termine de' cinque interpolati tra 78, e 300 della ferie
$A' \ldots . 0 . 78 . 300 . 666 \ldots$ ec.

 Si

Si ha 1.° $TA' = \frac{m-1}{1} 78 + \frac{\overline{m-1}\,.\,\overline{m-2}}{1\,.\,2} 144$.

2.° Per essere $m=2$, $r=5$, $s=5$, sostituendo invece di m il numero $m + \frac{s}{r+1} = 2 + \frac{5}{6} = \frac{17}{6}$, si ha $(\frac{17}{6} - 1) 78 + (\frac{17}{6} - 1)$ $(\frac{17}{6} - 2)(\frac{144}{2} = \frac{11}{6} 78 + \frac{11}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot 72 = \frac{11}{6}(78 + \frac{5}{6} \cdot 72) = \frac{11}{6}$ $(78 + 60) = \frac{11}{6} \cdot 138 = 253$, come si era avuto prima.

139. Dimostrazione del metodo. Si indichi per m la classe, che occupa in A qualunque termine t, e per m' si indichi la classe, che il medesimo t occupa in A'; è chiaro, che gli m, m' saranno qui numeri sempre diversi.

La serie A contiene tutti i termini di A', e di più tutti gli s^{esimi} degli r ommessi per formare A'; quindi in A' non si contengono, che i termini $(m-s)^{esimi}$ di A; cioè gli m'^{esimi} di A' sono gli $(m-s)^{esimi}$ di A; ma per il teorema 1.° num. 124. gli m'^{esimi} di A' sono gli $(\overline{m'-1}\,.\,r+m')^{esimi}$ di A; dunque gli $(m-s)^{esimi}$ di A sono gli $(\overline{m'-1}\,.\,r+m')$ del medesimo A. Quindi $m-s = \overline{m'-1}\,.\,r + m' = m'r + m' - r$; ed $m'\,.\,\overline{r+1}$ $+ s = m + r$, ossia $m' + \frac{s}{r+1} = \frac{m+r}{r+1}$; cioè il numero $m' + \frac{s}{r+1}$ è eguale al numero, che sostituito in TA' ha dato (num. 137.) l's^{esimo} cercato.

140. Si noti: 1.° Che prima d'applicare i metodi del num. 136. 138. all'interpolazione delle serie, conviene bene distinguere di quale classe esse sieno, se aritmetiche, o geometriche, o composte d'amendue, o d'altra specie qualunque: Ciò è necess-

necessario per trovare il vero termine generale delle date serie, con cui unicamente si troveranno coi metodi prescritti gli esatti termini intermedj.

2.° Che si propongono talvolta certe serie a interpolarsi, di cui non si sa ben deffinire a quale classe appartengano; in questi casi converrà osservare a quale classe s'accostino di più, per quindi maneggiarle come se veramente fossero di quella classe. Così nel calcolare i luoghi de' Pianeti si è osservato, che le serie de' luoghi de' medesimi, dedotte, o dalla osservazione, o dalle tavole per diversi tempi dati, più s'accostano alle serie aritmetiche, che non ad altre; quindi nel determinare le loro posizioni intermedie a' tempi, ed alle posizioni date, si suole sempre ad essi applicare il metodo delle serie aritmetiche. Il Sig. De La Lande (Acad. Par. an. 1761. p. 125., ed Astr. l. 24.) ha dimostrato con molta precisione, che per i calcoli astronomici, basta ridurre colle medie aritmeticamente proporzionali le differenze seconde, o al più le terze, ad essere costanti.

3.° Che in questi casi l'interpolazione non sarà che approssimata; e perchè approssimi sempre più nel determinare col nostro metodo il termine generale delle serie, converrà usare certe avvertenze, che suggerirà l'esperienza, e l'uso del calcolo; le principali sono di prendere per a' il termine m^{esimo}, tra il quale, e l'$(m+1)^{esimo}$ si deve determinare l's^{esimo} degli r; così il b' sarà la differenza dell' m^{esimo}, e dell' $(m+1)^{esimo}$, il c' sarà ....., ed il numero $m+\frac{s}{r+1}$ da sostituirsi in TA' invece di m, si trasformerà in $1+\frac{s}{r+1}$; questi sono compedj del num. 138.

141. Il Sig. Mouton è stato il primo a proporre il problema delle interpolazioni nell' anno 1670. Non si tardò a conoscere di quanta importanza esso fosse per tutta la Matematica pura, e mista; ed i migliori Matematici di questo secolo hanno

preso ad illustrarlo, ed a scioglierlo con metodi tutti tra se diversi, e tutti degni del vasto loro intendimento. Siano date due serie qualunque di quantità tali, che a ciascun termine d'una serie corrisponda con data legge un termine dell' altra; e si chiamino *funzioni* i termini della prima serie, e *radici* i termini della seconda: *Data una radice qualunque si cerca la funzione corrispondente, e data una funzione qualunque si cerca la corrispondente radice*. Questo problema è stato sciolto analiticamente dal Mayer (Acad. Petr. T. 2. p. 180.), e le formole del Mayer sono state ridotte a più semplice forma dall' Abbate La-Caille (Astr. Sol. P. 1. Sez. 1.). Il Newton (libr. 3. Princ. & Arit. Univ.); ed il Cotes (de Cal. diff. Newt.), rappresentando le radici con ascisse d'una curva, e le funzioni colle corrispondenti semi-ordinate ridussero alla geometría il problema medesimo: *Descrivere una linea curva di genere parabolico, che passi per punti comunque dati*. Aggiungi a questi il celebre Stirling verso il fine dell' egregio suo trattato sulle interpolazioni delle serie. Puoi ancora leggere i Commentarj sul sec. libr. di Newton (num. 75. 76. 77.) de' PP. Le Seur, e Jacquier, ed altri, ch' io qui non nomino per brevità.

142. Io mi sono presa la cura di leggere attentamente tutti i metodi de' citati Autori, e di ben penetrare le diverse strade, per cui ciascuno s'avvia al medesimo termine; ma finalmente sono entrato nel pensiere del Sig. De La Lande (Astron. l. 24. num. 3172.), cioè, che tutti, o la maggior parte di que' metodi non potevano mai essere d'un uso famigliare, comunque il problema delle interpolazioni sia assai frequente nella Matematica, principalmente nell' Astronomía. Il principale loro difetto si è di non potere per lo più determinare veruno de' termini intermedj senza conoscere, e passare per i termini precedenti, con infinite, e nojosissime sostituzioni. Credo, che il mio metodo per ciascuna classe, ed ordine di serie supplisca generalmente

mente a questo incomodo; i calcoli mi sembrano facili, e brevi più di quello, forse, si poteva sperare.

143. Non voglio qui ommettere due elegantissimi metodi per interpolare le serie aritmetiche, almeno fino alle terze differenze *inclusive;* questi sono i soli trai già pubblicati, che all' evitare tutti gli inconvenienti de' primi, congiungono una maravigliosa brevità nell' espressione, ed una eguale facilità ne' calcoli. Suppongo qui ancora, che si cerchi un intermedio tra l' m^{esimo}, e l' $(m+1)^{esimo}$ della data serie aritmetica. Il primo metodo si trova usato, ma non dimostrato, nè esposto in tutta la sua generalità pel secondo caso d'un problema de' logaritmi logistici nel tanto famoso libro intitolato: *Table of Logarithms* di Villelmo Gardinero (Londra. 1742.). Si chiami a, ciocchè per noi è $\frac{s}{r+1}$, si chiami b, ciocchè in nostro linguaggio sarebbe $\frac{s}{r+1}-1$, e finalmente si chiamino d', d'', d''' le differenze prime, seconde, e terze de' numeri dati. La quantità x da aggiungersi al m^{esimo} per avere il termine cercato, sarà

Per le seconde differenze

$$x=(d'+\frac{1}{2}bd'')a$$

Per le terze differenze

$$x=(d'+\frac{1}{2}bd''+\frac{1}{6}d'''.\overline{b+b^2})a.$$

L'altro metodo è del più volte citato Sig. De La Lande (Acad., ed Astr. luogo citato). Chiama egli p il nostro s, chiama m il nostro $r+1$, d la differenza del termine m^{esimo}, ed $(m+1)^{esimo}$, tra i quali si cerca il p^{esimo}, e d^2, d^3 le differenze seconde, e terze de' dati termini. La quantità x da aggiungersi all' m^{esimo} per avere il termine cercato, sarà

Per

Per le differenze seconde

$$x = p\frac{d}{m} + p\frac{p-m}{2}\cdot\frac{d^2}{m^2}$$

Per le differenze terze

$$x = p\frac{d}{m} + p\frac{p^2-m^2}{6}\cdot\frac{d^3}{m^3}$$

144. Si noti: 1.° Che nelle formole del Gardinero, d' è positivo, quando i termini disposti per l'interpolazione vanno crescendo; d'' è parimenti positivo, quando le prime differenze vanno scemando; d''' è simile a d'', quando le seconde differenze vanno scemando, altrimenti avrà un segno contrario a d''. 2.° Che nelle formole del De La Lande il primo termine è in amendue lo stesso, ed è il quarto proporzionale dell'analogía $m:d::p:$ al quarto, ed il secondo termine è in amendue diverso. La variazione de' segni in queste formole sono simili a quelle del Gardinero.

145. Essendo generali le formole del Gardinero, del De La Lande, e le mie, non possono essere diverse, che nell'espressione; così tutte le strade, per cui gli Analisti cercarono la soluzione delle equazioni di terzo grado andarono a terminare sempre nella formola Cardanica. E di fatti le differenze prime, seconde, terze, sono indicate

dal Gardinero per	d', d'', d'''
dal Sig. De La Lande per	d, d^2, d^3
da me per	b, c, d;

gli a, b del Gardinero sono gli $\frac{p}{m}$, $\frac{p}{m}-1$ del Sig. De La Lande; ed il mio valore di m da sostituirsi invece di m in TA', cioè (num. 140. 3.°) $1+\frac{r}{r+1}$ si riduce all'$1+\frac{p}{m}$ del Sig. De La Lande, ed al $1+a$ del Gardinero; del resto le formole sono tutte identiche.

146. Ma: il mio metodo 1.° non si ristringe solo alle serie aritmetiche, ma indefinitamente a qualunque ordine, o genere di serie, di cui assegnare si possa il termine generale.
2.° Applicato alle serie aritmetiche, si possono usare le differenze quarte, quinte, n^{esime}, con quella facilità, con cui nel mio, e negli altri due metodi si usano le differenze seconde, e terze, vedendosi subito in TA' la legge de' termini.

3.° Sostituendo nel mio TA' il numero $1+\frac{p}{m}$, oppure $1+a$ invece di m, ed indicando colle lettere del Sig. De La Lande, o con quelle del Gardinero le differenze de' dati termini, si formeranno facilmente le formole per le differenze più alte, secondo il metodo di questi Autori; formole, che non si saprebbero per altra via determinare senza un calcolo assai prolisso, ed intralciato.

Nota al fine.

Al num. 51. ho esposto un teorema per isciogliere una frazione, che abbia per numeratore l'unità, e per denominatore un prodotto di più fattori qualunque, in più frazioni, ciascuna delle quali abbia per numeratore la stessa unità, e per denominatore abbia uno de' medesimi fattori.

Per dimostrare quel teorema ho seguito il metodo indicato dalla Sig.ra Agnesi, di ridurre allo stesso denominatore la frazione data, e la somma delle derivate da essa, riuscendo la dimostrazione facilissima nel caso di due soli fattori espresso da essa Sig.ra Agnesi, ma che sale ad un numero di termini impraticabile, per poco, che cresca il numero de' medesimi fattori. Riflettendo dappoi ad un metodo di dimostrar questa regola comunicatomi in una sua lettera dal P. Francesco Gianella giovane Gesuita ben avvanzato in questi studj, trovo la dimostrazione medesima assai semplice, e corta, servendo sempre la formola pre-

precedente dimostrata, insieme con quella de' due soli fattori per andare avanti alla seguente, in cui vi sia un fattore di più.

I.° *Caso* $\frac{1}{xy}=\frac{1}{x(y-x)}+\frac{1}{y(x-y)}$

Imperocchè $\frac{1}{x(y-x)}+\frac{1}{y(x-y)}=\frac{1}{x(y-x)}-\frac{1}{y(y-x)}$

$$=\frac{y-x}{xy(y-x)}=\frac{1}{xy}$$

Si sono solamente mutati i segni nel secondo termine, indi fatta la somma dopo la riduzione allo stesso denominatore, si è diviso il numeratore, e il denominatore per lo stesso $y-x$.

Nel seguente caso di tre fattori, si scioglierà la formola de' primi due in due, indi ciascuna di queste due in altre due, e ne nasceranno quattro, ma le due ultime de' due binarj si mostreranno uguali ad una sola terza.

II.° *Caso* $\frac{1}{xyz}=\frac{1}{x(y-x)(z-x)}+\frac{1}{y(x-y)(z-y)}+\frac{1}{z(x-z)(y-z)}$

Imperocchè 1.° *sciogliendo* $\frac{1}{xy}$, *e moltiplicando per* $\frac{1}{z}$, *si ha*

$$\frac{1}{xyz}=\frac{1}{xz(y-x)}+\frac{1}{yz(x-y)},$$

2.° *sciogliendo* $\frac{1}{xz}$, *e moltiplicando per* $\frac{1}{y-z}$, *si ha*

$$\frac{1}{xz(y-x)}=\frac{1}{x(z-x)(y-x)}+\frac{1}{z(x-z)(y-x)},$$

3.° *sciogliendo* $\frac{1}{yz}$, *e moltiplicando per* $\frac{1}{x-y}$, *si ha*

$$\frac{1}{yz(x-y)}=\frac{1}{y(z-y)(x-y)}+\frac{1}{z(y-z)(x-y)}$$

Ora i primi due termini di questi binarj un per uno sono gli stessi, che nel secondo membro dell' equazione appartenente al caso II.°, *avendo*

avendo gli stessi binomj , benchè trasposti , e il terzo di esso membro qui è uguale a' due ultimi ; giacchè sciogliendo $\frac{1}{(x-z)(y-z)}$, *e multiplicando per* $\frac{1}{z}$, *si ha* $\frac{1}{z(x-z)(y-z)} = \frac{1}{z(x-z)(y-x)} + \frac{1}{z(y-z)(x-y)}$. *Basta riflettere , che* $(y-z)-(x-z)=(y-x)$, *ed* $(x-z)-(y-z)=(x-y)$.

III.° *Caso* $\frac{1}{xyzv} = \frac{1}{x(y-x)(z-x)(v-x)} + \frac{1}{y(x-y)(z-y)v(-y)}$

$+ \frac{1}{z(x-z)(y-z)(v-z)} + \frac{1}{v(x-v)(y-v)(z-v)}$

Imperocchè 1.° *sciogliendo* $\frac{1}{xyz}$ *pel caso* II.° , *si ha*

$$\frac{1}{xyzv} = \frac{1}{xv(y-x)(z-x)} + \frac{1}{yv(x-y)(z-y)} + \frac{1}{zv(x-z)(y-z)}$$

2.° *sciogliendo* $\frac{1}{xv}$, *si ha*

$$\frac{1}{xv(y-x)(z-x)} = \frac{1}{x(v-x)(y-x)(z-x)} + \frac{1}{v(x-v)(y-x)(z-x)}$$

3.° *sciogliendo* $\frac{1}{yv}$, *si ha*

$$\frac{1}{yv(x-y)(z-y)} = \frac{1}{y(y-y)(x-y)(z-y)} + \frac{1}{v(y-v)(x-y)(z-y)}$$

4.° *sciogliendo* $\frac{1}{zv}$, *si ha*

$$\frac{1}{zv(x-z)(y-z)} = \frac{1}{z(v-z)(x-z)(y-z)} + \frac{1}{v(z-v)(x-z)(y-z)}$$

Ora i primi tre termini di questi tre ternarj sono gli stessi , che nel secondo membro dell' equazione del caso III.° , *avendo gli stessi bi-*

 nomj ,

nomj, benchè qui l'ultimo di quel membro sia il primo; e il quarto di esso è uguale qui a' tre ultimi; giacchè sciogliendo $\frac{1}{(x-v)(y-v)(z-v)}$, *e facendo la stessa riflessione al residuo dalla sottrazione di un fattore dall' altro, si ha* $\frac{1}{v(x-v)(y-v)(z-v)} = \frac{1}{v(x-v)(y-x)(z-x)} +$

$$\frac{1}{v(y-v)(x-y)(z-y)} + \frac{1}{v(z-v)(x-z)(y-z)}.$$

IV.° *Caso* $\frac{1}{xyzvt} = \frac{1}{x(y-x)(z-x)(v-x)(t-x)}$

$$+ \frac{1}{y(x-y)(z-y)(v-y)(t-y)} + \frac{1}{z(x-z)(y-z)(v-z)(t-z)}$$

$$+ \frac{1}{v(x-v)(y-v)(z-v)(t-v)} + \frac{1}{t(x-t)(y-t)(z-t)(v-t)}$$

Imperocchè 1.° *sciogliendo* $\frac{1}{xyzv}$ *pel caso* II.°, *si ha*

$$\frac{1}{xyzvt} = \frac{1}{xt(y-x)(z-x)(v-x)} + \frac{1}{yt(x-y)(z-y)(v-y)}$$

$$+ \frac{1}{zt(x-z)(y-z)(v-z)} + \frac{1}{vt(x-v)(y-v)(t-v)}$$

2.° *sciogliendo* $\frac{1}{xt}$, *si ha* $\frac{1}{xt(y-x)(z-x)(v-x)}$

$$= \frac{1}{x(t-x)(y-x)(z-x)(v-x)} + \frac{1}{t(x-t)(y-x)(z-x)(v-x)}$$

3.° *sciogliendo* $\frac{1}{yt}$, *si ha* $\frac{1}{yt(x-y)(z-y)(v-y)}$

$$= \frac{1}{y(t-y)(x-y)(z-y)(v-y)} + \frac{1}{t(y-t)(x-y)(z-y)(v-y)}$$

4.° *scio-*

4.° *sciogliendo* $\frac{1}{z\,t}$, *si ha* $\frac{1}{z\,t\,(x-z)\,(y-z)\,(v-z)}$

$$= \frac{1}{z\,(t-z)\,(x-z)\,(y-z)\,(v-z)} + \frac{1}{t\,(z-t)\,(x-z)\,(y-z)\,(v-z)}$$

5.° *sciogliendo* $\frac{1}{v\,t}$, *si ha* $\frac{1}{v\,t\,(x-v)(y-v)(z-v)}$

$$= \frac{1}{v\,(t-v)(x-v)\,(y-v)(z-v)} + \frac{1}{t\,(v-t)\,(x-v)(y-v)\,(z-v)}$$

Ora i primi quattro termini di questi quattro binarj sono gli stessi, che nel secondo membro dell' equazione del caso IV.° *avendo gli stessi binomj, benchè qui l'ultimo di quel membro sia il primo; e il quinto di esso è uguale qui a' quattro ultimi; giacchè sciogliendo,*

$\frac{1}{(v-t)\,(x-v)(y-v)\,(z-v)}$ *colla stessa riflessione al residuo della sottrazione di un fattore dall' altro, si ha* $\frac{1}{t\,(x-t)\,(y-t)\,(z-t)\,(v-t)}$

$$= \frac{1}{t\,(x-t)\,(y-x)\,(z-x)\,(v-x)} + \frac{1}{t\,(y-t)\,(x-y)\,(z-y)\,(v-y)}$$

$$+ \frac{1}{t\,(z-t)\,(x-z)\,(y-z)\,(v-z)} + \frac{1}{t\,(v-t)\,(x-v)(y-v)(z-v)}$$

Così si anderebbe avanti ad un numero maggiore di fattori, servendosi sempre della formola precedente per la seguente.

Per dimostrare la formola de' fattori m *si scioglie la precedente delli* m — 1 *in frazioni* m — 1. *Indi colla formola di due fattori si scioglie ognuna di esse in altre due. Le prime di tutti questi binarj di frazioni saranno le stesse, che le prime* m — 1 *della formola, che si deve dimostrare: tutte le seconde insieme si trovano uguali alla sola ultima di essa formola, dividendo anche questa colla formola de' fattori* m — 1 *non più più semplici, ma binomj, tali però, che sottraendo*

ciascun di essi da' suoi compagni, ne nascono alcuni binomj colla ellissione di un termine comune. Il calcolo riesce trattabilissimo, anzi semplice. Si vede anche da questo esempio, quanto importi il pigliar una dimostrazione pel verso suo: un metodo porta giri lunghissimi, e un altro scorta la strada, e riduce ad una maravigliosa semplicità le cose, che prese con altro metodo riescono complicatissime.

AG-

AGGIUNTA

DI DUE MEMORIE

DEL PADRE

RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

DELLA COMPAGNIA DI GESU'

Pubblico Professore di Matematica
nella Regia Universita' di Pavia.

MEMORIA PRIMA.

Metodo di evitare i logaritmi negativi.

1. IN tutte le forme de' logaritmi, che sono in uso, come in quelli delle tavole comuni, e negli iperbolici, il logaritmo di ogni frazione è negativo, la quale cosa disturba il calcolo, essendo molesta la sottrazione delle mantisse formate da varie figure decimali, e convenendo nelle somme sommar da se i positivi, indi da se i negativi, e poi sottrarre la somma minore dalla maggiore, triplicandosi così in certa maniera il calcolo. Quindi torna bene l'avere qualche metodo da evitare i logaritmi negativi, come già da varj anni si è cominciato a praticare, e vi vogliono delle regole sicure, e facili per non errare nella pratica.

2. Si otterrà facilmente questo fine, se al logaritmo di qualunque frazione se ne sostituisca un altro, il quale nasca da un' aggiunta, che se gli fa, senza, che questa aggiunta turbi il calcolo, ove si badi a quello, che si è aggiunto per tenerne conto al luogo debito.

3. Due sorti di frazioni distingueremo: La prima sorte sarà della forma decimale, in cui dopo la virgola divisoria, o venga immediatamente una delle 9 figure significanti, o vi sieno degli zeri, e chiameremo n il numero totale delle figure decimali, N l'intero espresso dalle medesime prese senza la virgola divisoria: tanto nella frazione 0, 752, quanto nella 0, 00752 sarà $N=752$; ma nella prima $n=3$, nella seconda $=5$. La seconda sorte di frazioni sarà della forma $\frac{1}{B}$, o B sia un intero, o un rotto decimale; benchè in questo secondo caso facilmente si riduce alla forma $\frac{C}{B}$; mentre se $B=\frac{N}{(10)^n}$, sarà $\frac{1}{B}=\frac{(10)^n}{N}$;

ma

ma noi fempre la confidereremo fotto la forma , in cui il numeratore fia $= 1$.

4. In ordine alle efpreffioni decimali noterò qui particolarmente quello, che per altro è cofa cognita, e appartiene generalmente anche agli interi. *La fola mantiffa determina le figure del numero corrifpondente ad un logaritmo*, *e viceverfa: la caratteriftica determina il fito della virgola diviforia rifpetto ad effe*, *e ne viene determinata*. Se la caratteriftica farà r, dipende tutto dal valore della formola $r+1$. Se quefta è $= 0$, effendo $r = -1$, le figure vanno fubito dopo la virgola, fenza zeri immediati dopo di effa: fe contiene un numero negativo coll' effere r negativo maggiore dell' unità, vi vogliono dopo la virgola immediati tanti zeri, quante unità effa efprime: fe contiene un valor pofitivo, altrettante di quelle figure fi devono pigliar per l' intero, fupplendo con degli zeri al fine, fe non baftano, o mettendo le refidue dopo la virgola per decimali, fe avvanzano.

5. Se fi cerca la corrifpondenza delle figure colla mantiffa, conviene andare al fin della tavola, e cercarla fra que' numeri, che abbiano il maffimo numero di figure, a cui fi ftendono effe tavole, ove o fi troverà efatta, o fi potrà cercare più proffima col metodo ufato delle differenze proporzionali, o anche delle interpolazioni. Siccome il logaritmo di un numero A fi fcrive lA, la fola mantiffa fi può qui dinotare per pA.

6. Ora pel noftro fine di evitare i logaritmi negativi aggiungeremo qui in amendue quefte forti di frazioni al logaritmo volgare il 10, baftando quefto, come è facile a vedere, per tutte quelle, che non fono minori di $\frac{1}{(10)^{10}}$: le minori non fogliono occorrere nell' ufo ordinario, e quando occorrano per qualche cafo ftraordinario, daremo il metodo di evitare anche allora i logaritmi negativi. Il logaritmo così accrefciuto lo chiameremo *gran logaritmo*, efprimendolo per LA.

7. Con-

7. Confidereremo ancora il complemento logaritmico di un numero, il quale si forma, sottraendo dal 9 tutte le precedenti figure del suo logaritmo, e l'ultima dal 10, ciocchè si fa facilmente, pigliando immediatamente dalle tavole invece delle figure ivi notate il complemento di quelle al 9 di questa al 10. Questo complemento logaritmico lo dinoteremo per $l'A$.

8. Dalle posizioni fatte, facilmente si ricavano le seguenti formole: 1.° $l'A = 10 - lA$, 2.° $lA = 10 - l'A$, 3.° $LA = 10 + lA$, 4.° $lA = -10 + LA$, 5.° $L\frac{1}{A} = l'A$, 6.° $L\frac{1}{A} (= l'A) = n + l'N$, ove sia $A = \frac{N}{(10)^n}$.

La prima nasce dalla definizione del complemento logaritmico (n. 7.): La seconda vien dalla prima trasponendo: La terza dalla definizione del gran logaritmo (n. 6.): La quarta dalla terza pur trasponendo: La quinta dalla 3, e 1 così: $L\frac{1}{A} = 10 + l\frac{1}{A} = 10 - lA = l'A$: La sesta dalla prima così. Essendo $A = \frac{N}{(10)^n}$, sarà $lA = -n + lN$, e $l'A = 10 + n - lN = n + l'N$.

9. Si ha inoltre, che *la mantissa del gran logaritmo è la stessa, che del volgare;* giacchè nella formola 3. si muta la sola caratteristica coll' aggiunta di 10.

Per la caratteristica r la formola sarà $r - 9$. Se sarà $r - 9 = 0$, cioè $r = 9$; sarà per la quarta formola la caratteristica di $lA = 9 - 10 = -1$, caso, in cui (n. 4.) tutte le figure dovute alla mantissa vanno subito dopo la virgola senza zeri. *Quindi, se* $r - 9 = \pm t$, *sarà* t *il numero delle figure intere avanti alla virgola, o degli zeri immediati dopo di essa.*

10. Dalle cose dimostrate si ricavano le seguenti tre regole fondamentali.

I. *Il complemento logaritmico di un numero intero, si ha pigliando nelle tavole communi il complemento di ogni figura precedente del suo logaritmo al 9, e dell' ultima al 10, e per un numero decimale di n figure, basta il pigliare i complementi suddetti pel logaritmo del numero espresso dalle stesse figure, e aggiungere n alla caratteristica.*

II. *Per avere il gran logaritmo di una frazione, che abbia l'unità per numeratore, si piglj il complemento logaritmico del suo denominatore.*

III. *Per avere il gran logaritmo di una frazione decimale, si piglj la mantissa del numero intero espresso dalle sue figure colla caratteristica 9, o se ha un numero* t *di zeri immediati dopo la virgola,* 9—t.

Della prima la prima parte si ha dalla definizione del complemento aritmetico, la seconda parte dalla formola sesta: La seconda regola è contenuta nella formola quinta: La terza nella sesta.

11. Passando alle potenze, e radici: Se A esprime una frazione, o dell'una, o dell'altra sorte, si avrà

$$L\,A^m = -10\,(m-1) + m\,L\,A.$$

Imperocchè $L\,A^m = 10 + l\,A^m = 10 + m\,l\,A =$ (formola 3.) $10 - 10\,m + m\,L\,A = -10\,(m-1) + m\,L\,A$.

12. Se invece di una potenza intera si abbia una radice m, basterà mettere $\frac{1}{m}$ invece di m. Quindi

$$L\,A^{\frac{1}{m}} = -10\left(\frac{1}{m}-1\right) + \frac{1}{m}\,L\,A = \frac{10\,(m-1) + L\,A}{m}.$$

Ne nascono altre due regole

IV. *Per avere il gran logaritmo di una potenza* m *di una frazione, si moltiplichi per* m *il suo gran logaritmo, e si levi dalla sua caratteristica* 10 (m—1).

V. *Per*

V. *Per averlo di una radice* m, *si aggiunga alla caratteristica del suo gran logaritmo* 10 (m — 1), *indi il tutto si divida per* m.

13. Metteremo qui gli esempj corrispondenti alle regole.

$m = 3 \quad A = \frac{1}{752}$	$A = \frac{1}{0.00752}$ $n = 5$	$A = 0,00752 \quad t = 2$
$l\,752 = 2,87622$	$l'\,752 = 7,12378$	$p\,752 = 0,87622$
	$n = 5$	$9 - t = 7$
$LA = l'\,752 = 7,12378$	$LA = 12,12378$	$LA = 7,87622$
3	3	3
21,37134	36,37134	23,62866
— 20	— 20	— 20
$LA^3 = 1,37134$	LA^3 16,37134	LA^3 3,62866
$LA = 7,12378$	12,12378	7,87622
20	20	20
27,12378 | 3	32,12378 | 3	27,87622 | 3
$LA^{\frac{1}{3}} = 9,04126$	$LA^{\frac{1}{3}} = 10,70793$	$LA^{\frac{1}{3}} = 9,29207$

14. Vi sia ora un valore $A = \frac{BCDA \ldots \text{ec.}}{MNP \ldots \text{ec.}}$, e si cerchi LA.

Si avrà $LA = 10 + lA = 10 + lB + lC$ ec. $- lM - lN$ ec. In questa formola se tra' fattori B, C, D ec. vi sono de' rotti, si avranno i logaritmi negativi, e i logaritmi di M, N ec. dovendosi sottrarre, vengono a turbare, come se fossero negativi. Quindi servendosi della 4., e 6. formola del num. 8., e considerando i divisori, come fattori della forma $\frac{1}{M}$, se sia m il numero di tutte le quantità, converrà dalla somma di tutti i gran logaritmi levare $10\,m$, e aggiungervi 10. Così si avrà

$$LA = -10(m-1) + LB + LC + LD \text{ ec.} + l'M + l'N + l'P \text{ ec.}$$

15. Pel

15. Pel fine, che si ricerca, non occorre pigliare i gran logaritmi de' fattori interi del numeratore, per poi sottrarli nel — 10 $(m-1)$; ma basta pigliarli ne' soli fattori frazionarj, o sieno decimali del numeratore, o nascano dalla unità divisa per ogni fattore del denominatore. Si avrà la seguente regola.

VI. *Per avere il gran logaritmo di una formola semplice, che abbia nel numeratore fattori decimali* m, *e nel denominatore fattori qualunque* n, *si piglino i logaritmi volgari di tutti gli interi del numeratore; i gran logaritmi delli decimali di esso, e i complementi logaritmici de' fattori del denominatore, e fattane la somma, si levi dalla sua caratteristica* 10 (m + n — 1).

$$A = \frac{2347 \times 358 \times 0,275 \times 0,00752}{37 \times 249 \times 00153} \quad m = 2,\ n = 3$$

$$\begin{array}{llll}
 & l\ 2347 & = 3,37051 & \\
 & l\ 358 & = 2,55388 & \\
 & L\ 0,275 & = 9,43933 & \\
 & L\ 0,00752 & = 7,87622 & \\
 & l'\ 37 & = 8,43180 & \\
 & l'\ 249 & = 7,61320 & \\
 & l'\ 0,0153 & = 8,18469 & \\
 & & \ \ 45,58963 & 0,58963 = p\,3887 \\
-10\,(m+n-1) = & & -40 & 5-9=-4 \\
 & L\,A & = \ \ 5,58963 & A = 0,00003887 \text{ (n. 9.)}
\end{array}$$

16. Se vi fossero state delle potenze de' rotti, o delle radici; si sarebbero trovati i loro gran logaritmi colle regole 5, e 6, e si sarebbero adoprati al modo stesso.

17. La sottrazione, che si è fatta qui nella caratteristica, essendo di un corto numero di diecine, si poteva fare senza scriverla, levando via nel portar le diecine per la somma quel-

le

le 4., che corrifpondevano alle 5. frazioni, e così fi ufa realmente. Si ufa anche, fenza adoprare il fegno L, di mettere il fegno l, e fcrivere non il logaritmo volgare, ma l'accrefciuto di una diecina, che io ho qui chiamato gran logaritmo. Dove vi fono i divifori, io fono pur folito, come ho fatto qui, per evitare la fottrazione de' loro logaritmi, fervirmi de' complementi logaritmici, evitandofi così la fottrazione di una mantiffa dall' altra, la qual cofa può farfi ogni volta, che occorra di dover fottrarre qualche logaritmo: in quefto cafo non può fcriverfi nell' efempio propofto fenza falfità $l\,37 = 8,43180$, ma, o conviene dare un fegno al complemento logaritmico, come ho fatto, mettendo un l' accentato, o conviene fcrivere $l\,\frac{1}{37}$, fe invece di l' fi vuole fcrivere l.

18. Bafta dunque, comunque uno voglia fcrivere, (benchè per le diverfe cofe fia meglio adoprar diverfi fegni), bafta, dico, badar a *prendere i logaritmi volgari de' fattori interi del numeratore, i logaritmi accrefciuti di* 10 *de' rotti decimali, i complementi logaritmici de' fattori del denominatore*; *accrefcendo, fe quefti fon decimali, i complementi dell' intero da effi efpreffo, nelle caratteriftiche di tante unità, quante fono in tutto le figure di ciafcuno, indi nel far la fomma levare tante diecine, da quelle, che fi porterebbero indietro, quante conviene; fcrivendo il refiduo. Per avere il logaritmo volgare bifognerebbe levarne tante, quanti fono ftati in tutto i fattori frazionarj del numeratore, e i fattori qualunque del denominatore, e allora fe la caratteriftica rimane* r, *le figure avranno interi avanti alla virgola, o zeri dopo di effa* r — 1 (n. 4.), *fecondo che farà pofitivo, o negativo un tal valore, rimanendo le cofe nello ftato della teoria comune de' logaritmi*.

19. *Se ciò non fi può, perchè il numero delle diecine fia maggiore*, (come lo farebbe nel propofto efempio, in cui fi portavano 4. diecine, che ànno dato il 45. nella caratteriftica, e per avere

il

il logaritmo volgare se ne sarebbero dovuti levare 5, per li 5 fra rotti nel numeratore, e fattori nel denominatore) *allora vanno levate diecine una meno* (come si è fatto qui, levandone 4), *rimane quello, che abbiamo chiamato gran logaritmo, che dà il numero cercato, dando colla mantissa le figure, e determinando la sede della virgola colla formola* $r-9$ (n. 9.). Qui nell' esempio posto al n. 15. si è così trovato di fianco il numero A, in cui essendo $r-9=5-9=-4$, si sono messi dopo la virgola 4. zeri, pigliando 0, 00003887 pel valore cercato di A.

20. Può darsi il caso, che non si possano sottrarre neppure tante diecine una meno, come sarebbe seguito qui, se la somma delle caratteristiche fosse stata 35, o 25. In tal caso non si sarebbe evitato un negativo, e converrebbe, se non si usa altro artificio, mutar anche la mantissa, ed avere un logaritmo negativo col sottrarre all' opposto la trovata somma da 40, 00000. Ciò accaderebbe per la troppa piccolezza del numero corrispondente al logaritmo, a cui non arriva la forza del 10 aggiunto (n. 6.). Vi è però un artificio facile ivi promesso per evitare anche allora la sottrazione delle mantisse. *Basta levare quante diecine si può, e mettere innanzi alla caratteristica col segno negativo quelle diecine di più, che non si sono sottratte; indi nel numero alli zeri dati da* $r-9$ *aggiungere altrettante diecine di zeri*. Imperocchè se quel residuo si dica r', e le diecine non sottratte sieno t; sarà l'intero $r=r'-t$, onde $r-9$ avrà -20 di più del semplice $r'-t$.

21. Se fosse venuta la somma 25, 58963; non potendosi levare 4 diecine, si sarebbe potuto scrivere $-20+5$, 58963, e il numero A, invece di avere zeri 4, ne avrebbe dovuti avere 24. Al modo stesso nel primo esempio del n. 13., se si fosse cercata la ottava potenza di $A=\frac{1}{752}$, moltiplicando $LA=7$, 12378 per 8, si sarebbe avuto 56, 99024, e si sarebbe dovuto sot-

ſottrarre 70. Conveniva ſcrivere $-20+6,99024$, e dove al $LA^3=1,37134$ corriſpondeva $A^3=0,000000002351$ con otto zeri per eſſere $1-9=-8$, per A^8 vi ſarebbero voluti dopo la linea zeri 23 prima di 9778, per eſſere $6-9=-3$, e $-20-3=-23$.

22. Lo ſteſſo anderebbe praticato in ogni altra congiuntura, in cui per le regole ſuddette veniſſe nella caratteriſtica un numero maggiore da doverſi ſottrarre da un minore: o converrebbe tener a mente il numero delle diecine, che non ſi ſono potute ſottrarre, o per non dimenticarſene, anderebbero piuttoſto ſegnate innanzi col ſegno negativo; ma queſto ripiego non ſarà mai neceſſario, fuori che ove occorrano frazioni minori delle eſpreſſe da una figura, che ſia la decima dopo la virgola, cioè di $\frac{1}{10000000000}$.

23. L'aggiunta, che ſi è fatta di 10 al logaritmo volgare di un numero per mutarlo in un altro, che ſi è qui chiamato gran logaritmo, ſe ſi faceſſe a tutti i logaritmi delle tavole comuni, ſi avrebbero nuove tavole di una forma di logaritmi ricavata da una idea di eſſi più generale. Comunque una progreſſione geometrica ſi combini con un'aritmetica, ſi ponno i termini di queſta chiamare logaritmi de' termini corriſpondenti di quella, ed eſſi pure avranno la proprietà, che i logaritmi di 4. termini geometricamente proporzionali ſono aritmeticamente proporzionali; onde datine i primi tre, ſi troverebbe il logaritmo del quarto col ſottrarre il logaritmo del primo dalla ſomma de' logaritmi degli altri due. Di queſta natura ſarebbero i logaritmi di quelle nuove tavole; giacchè un' aggiunta di un termine coſtante a tutti i termini di una progreſſione aritmetica non ne turba nè la natura, nè la ragion comune, e ſolo traſporta più indietro il limite tra i poſitivi, e i negativi.

Ma ove all' 1 non corriſponda nella progreſſione aritmetica lo

zero,

zero, non si ha la formola $lab = la + lb$, da cui ne vengono le altre tre $l\frac{a}{b} = la - lb$, $la^m = mla$, $la^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}la$. Tutte sarebbero alterate dal logaritmo dell' unità, che converrebbe aggiungere, o sottrarre una, o più volte; giacchè essendo $1 . a :: b . \frac{ab}{1} = ab$, sarebbe $lab = la + lb - l1$. Per questo si è combinato ne' logaritmi, che sono in uso, l' 1 collo zero, acciò come quello non altera le quantità nella moltiplicazione, o divisione, così questo non le alteri nella somma, o sottrazione.

24. Questo è un gran vantaggio, per l' uso grande, di cui sono que' teoremi; ma è inseparabile dallo svantaggio di avere negativi, o i logaritmi di tutte le frazioni, o (se si volessero positivi i logaritmi di queste col combinare una progressione aritmetica crescente con una geometrica decrescente) i logaritmi degli interi; mentre all' opposto ove il logaritmo dell' unità è molto grande, rimangono positivi i logaritmi di tutte le frazioni, che non abbiano un denominatore maggiore di quel logaritmo dell' unità, che nel caso nostro viene ad essere quel 10, che si è aggiunto a tutti i logaritmi volgari delle tavole comuni per farli divenire gran logaritmi, e coll' ajuto loro evitare i negativi in tutte le frazioni non minori di $\frac{1}{(10)^{10}}$.

25. Il disturbo, che recavano i logaritmi negativi, fu riconosciuto fino dal principio della loro invenzione, riuscendo essi molto incomodi particolarmente nella Trigonometría, in cui vengono in uso i logaritmi delle funzioni degli archi, e nelle tavole vi si mettono quelli de' seni, e delle tangenti. Desiderandosi di prendere l'unità pel raggio del circolo, o sia pel seno tutto, venivano a riuscire frazioni semplici tutti i seni, e tutte le tangenti fino a' 45. gradi, che sono minori dell' unità, rimanendo maggiori dell' unità tutte le altre tangenti, ed essendo

pur

pur maggiori dell' unità tutte quante le fecanti : quindi venivano ad effere negativi i logaritmi di tutti i feni, e della metà delle tangenti, rimanendo pofitivi tutti quelli dell' altra metà di tangenti, e tutti quelli delle fecanti.

26. Vi fu, chi riflettendo all' effere più frequente l'ufo de' feni, oltrechè le tangenti, e fecanti fi ânno dipendentemente da effi, per effere al raggio $=1$ tang. $A = \frac{\text{fin. } A}{\text{cof. } A}$, e fec. $A = \frac{1}{\text{cof} A}$, credette foffe cofa opportuna il combinar appunto una delle due progreffioni decrefcente coll' altra crefcente, per avere pofitivi tutti i logaritmi de' feni, e ne pubblicò le tavole. Ma oltrechè vi era un qualche imbarazzo nella coftituzione de' logaritmi per i feni, contrarj a quella de' numeri efprimenti i lati de' triangoli piani, e di altri valori, a' quali fi paffava oltre nel calcolo (benchè per altro quefto era fenza grande confeguenza negli ufi ordinarj, ne' quali entrano i foli rapporti tra i feni, e il raggio), non fi otteneva il fine pienamente, venendo fempre negativi i logaritmi della metà delle tangenti ricavate da' feni, e i logaritmi di tutte le fecanti.

27. Quindi fu comunemente abbracciato l'altro partito, di abbandonare l'unità pel valore del raggio, e concepirlo divifo in un gran numero di parti, foftituendo così a quell' unità più grande, un' unità più piccola, dalla quale ripetuta molte volte foffe formata quefta, e in quefte unità furono trovati, ed efpreffi tutti i feni, tangenti, e fecanti naturali, e furono inferiti nelle tavole. Baftava fare il raggio $=1000000$ per avere efpreffo co' numeri interi il feno anche di un minuto fecondo, che allora viene ad effere $=48,5$; ma per abbondare fi è fatto nelle tavole più comuni $=10000000$, onde anche un terzo ha il feno efpreffo con un intero venendo $=8$.

28. Così anche i logaritmi de' feni degli angoli piccoliffimi venivano ad effere pofitivi, rimanendo negativi quelli foli, che

appartengono ad angoli comunemente disprezzati per la eccessiva loro piccolezza: ma il logaritmo del raggio riusciva incomodo, venendo ad essere = 7, 000 ec., numero non così comodo ad aggiungere, e levare nelle occasioni richieste dalla multiplicazione, e divisione pel raggio. Quindi per li logaritmi de' seni si concepì il raggio diviso in un numero di parti espresso da un' unità con 10 zeri, venendo così ad essere il logaritmo di esso raggio = 10 . 000 ec., benchè insieme si lasciò nelle stesse tavole diviso per li seni naturali in parti 10000000, senza che queste due unità diverse turbassero il calcolo, sì perchè i seni al raggio $(10)^7$, si riducono a que' del $(10)^{10}$ col solo aggiungere 3 zeri al fine, sì, e molto più, perchè le ragioni de' seni fra se, e al raggio, le quali sole per l'ordinario vengono considerate, rimangono le medesime, con qualunque unità si misurino, ed esprimano.

29. Questa sorte di logaritmi de' seni al raggio $(10)^{10}$, rispetto a' logaritmi de' seni al raggio = 1, sono appunto lo stesso, che i nostri gran logaritmi rispetto a' logaritmi volgari; giacchè anche qui diviene = 10 il nuovo logaritmo di quella, che prima era un' unità maggiore, ed ora è divenuto un numero grosso di unità minori, ogni seno viene espresso col numero, con cui sarebbe stato espresso essendo il raggio = 1, ma moltiplicato per $(10)^{10}$, ed ogni logaritmo uguale al logaritmo di quella ipotesi accresciuto di 10 unità nella sua caratteristica.

30. Questo è stato l'unico rimedio adoprato per un pezzo per evitare nella Trigonometría i logaritmi negativi, e anche per questo si soleva introdurre nelle formolette, che per l'ordinario erano semplici, e corte, e nelle proporzioni l'espressione del raggio fatto = R, per poter tener conto del suo logaritmo, e aggiungerlo, o sottrarlo. Ma cominciato a introdursi in questi ultimi tempi l'uso delle formole assai più complicate, e più frequentemente adoprate nella Trigonometría, e in tutta l'Astro-

no-

nomía, anzi l'uso de' seni, e tangenti anche più generalmente nella Geometría per le proprietà delle curve, e nella sublime analisi per le integrazioni, si è tornato in essa a considerare il raggio $= 1$, per risparmiare la sua espressione, e rendere tanto più semplici le formole, col renderle meno caricate di simboli, ritenendo per altro le espressioni logaritmiche così, come si trovano nelle tavole comuni. Quindi realmente nelle medesime tavole si trovano per la serie naturale de' numeri i logaritmi volgari, e nelle tavole de' logaritmi, de' seni, e tangenti, (i quali logaritmi si chiamano anche seni, e tangenti artificiali) i logaritmi volgari de' seni computati al raggio $= (10)^{10}$, ma che sono que', che qui abbiamo chiamati gran logaritmi per li seni computati al raggio $= 1$, richiedendo l'uso di essi l'avvertenza al numero delle volte, che va nelle formole stesse considerata l'ommissione della espressione del raggio, la quale cosa non è difficile ad aversi, attesa l'omogeneità, che rispetto alle espressioni de' seni, e tangenti, e del raggio, devono introdurvi le proporzioni, per le quali solo essi entrano nelle medesime formole.

31. Introdotto già l'uso di considerare il raggio $= 1$, e di servirsi delle tavole comuni per li logaritmi de' seni, si è ito innanzi ad aggiungere una diecina di unità a' logaritmi delle altre frazioni, per evitare in esse ancora i logaritmi negativi; ed io qui ripigliando la cosa da' suoi principj, ho date le regole generali, le quali sono semplici, e piane, e serviranno per evitare sempre i logaritmi negativi di tutte le frazioni non minori di $\frac{1}{(10)^{10}}$, anzi per evitare ogni sottrazione di qualunque logaritmo, e anche nelle frazioni minori senza alcun logaritmo negativo, evitar sempre ogni sottrazion di mantissa, e rimediare con una pratica semplicissima a qualunque inconveniente, che possa occorrere ancora nelle caratteristiche.

APPENDICE

Su i Logaritmi delle quantità negative.

32. A Vendo parlato nella presente Memoria de' logaritmi negativi, era troppo naturale il trattare ancora de' logaritmi delle quantità negative, su i quali si mosse già la controversia tra il Leibniz, e il Bernoulli, come si vede nel loro Commercio epistolico al tomo 2. della pag. 269., sostenendo il primo, che essi erano immaginarj, e che la logaritmica aveva un solo ramo sopra l'asse, e il secondo, che erano reali, e uguali a' logaritmi delle medesime quantità prese positivamente, avendo la stessa curva due rami infiniti sopra, e sotto l'asse uniti fra loro colla continuità geometrica. A questo fine, mentre già si stampava quest' Opera avevo studiata a fondo tutta la materia all' idea di aggiungere per modo di appendice l'esame di essa, e il mio sentimento disteso. Nello stendere l'appendice mi è cresciuta fra le mani la materia in modo, che veniva ad essere, come suol dirsi, molto maggiore la giunta della derrata. Quindi ho giudicato di fare una Memoria a parte su questo argomento, che ho già distesa, e pubblicherò altrove.

33. Intanto per chi vorrà istruirsi di questa controversia dirò qui, quali sono i documenti, che mi sono capitati in mano, appartenenti ad essa. Si rinnovò la questione nel 1746., e 1747. fra il d'Alembert, e l'Eulero, per via di lettere, che a mia notizia non ânno veduta ancora la pubblica luce, stando il primo pel Bernoulli, e il secondo pel Leibniz. Uscì in conseguenza nel 1751. nel tomo di Berlino pel 1749. una Memoria dell' Eulero, che non fa menzione di quel suo carteggio col d'Alembert, in cui crede di avere sopita per sempre la controversia coll' avere trovato, che ogni quantità ha infiniti logaritmi, i quali per le negative sieno tutti immaginarj, per le positive lo

sieno

ſieno tutti fuori di uno ſolo reale: con queſto ritrovato, crede di conciliare tutte le difficoltà, dandola così vinta al Leibniz.

34. Non ſi acquietò il d'Alembert a queſta deciſione, e non ſolo non credette dimoſtrata la ſentenza dell'Eulero, ma credette all'oppoſto di poter egli validamente ſoſtenere l'opinione contraria del Bernoulli, e pubblicò nel 1761. nel primo tomo de' ſuoi Opuſcoli una Memoria a queſto fine, in cui parla delle ſuddette ſue lettere, e riſponde a tutti gli argomenti, e difficoltà dell'Eulero.

35. Intanto nelle Memorie di Berlino del 1755. il Walmeſley aveva inſerita una Memoria ſullo ſteſſo argomento, in cui dimoſtra le ſteſſe formole dell'Eulero, ma inſiſte ſulla inutilità della queſtione, perſuaſo col Leibniz, che i ſegni non entrando ne' rapporti, non vi ſia vera proporzione tra i poſitivi, e negativi come tali, e in conſeguenza, che è coſa inutile il penſare a' logaritmi, che dovrebbero miſurare queſti rapporti.

36. Nelle Memorie di Torino vi è nel primo tomo uſcito l'anno 1759. una Memoria ſu queſto del Sig. Cav. di Foncenex, in cui ſoſtiene coll'Eulero la ſentenza del Leibniz, e dimoſtra con un terzo metodo le ſteſſe formole dello ſteſſo Eulero, ma nel ſecondo tomo per l'anno 1760., e 1761. ve n'è un'altra, in cui dopo veduta la Memoria del d'Alembert, rimane contro di lui nella parte aritmetica della queſtione, ma muta parere in ordine alla continuità de' due rami della logaritmica, quale crede di dimoſtrare con un ſuo nuovo argomento ivi prodotto.

37. Nella Enciclopedía vi è l'articolo *logaritmo* ſteſo dal d'Alembert molti anni prima, ma pubblicato nell'anno ſcorſo 1766., nel quale ſoſtiene la ſteſſa ſua opinione, accennando alcune ragioni, e rimettendoſi ad alcuni de' ſuddetti monumenti, parte de' quali ivi nomina. Inclina al fine a credere, che vi ſia dentro della lite di voce.

38. Finalmente vi è anche qualche coſa ſu queſto argomen-

to

to ne' 12. Commentarj del P. Scarrella pubblicati l'anno scorso 1766. nel Commentario 4. dal num. 36., trattandone per occasione dell'uso, che ne viene nel volere determinare il movimento di un punto attratto ad un centro con alcune leggi di forze.

39. Io sono persuaso, che tutte le difficoltà, e contraddizioni nascano appunto dalla oscurità, e mancanza di precisione delle idee attaccate ad alcuni nomi da' moderni Matematici; onde ne nascano tante liti fra loro, mentre la pacifica Geometría de' Greci n'è priva affatto. Tali sono a mio giudizio le idee delle quantità immaginarie, che sono assurde, dell' infinito assoluto, che mena prima a de' misterj, indi a degli assurdi, come ho fatto vedere nel terzo tomo de' miei Elementi, quelle degli infinitamente piccoli mal concepiti da alcuni, e però trattati in modo da incorrere in errori; benchè di questi, e degli indefinitamente grandi si possano avere delle idee precise, e delle leggi sicure per bene adoprarli, come ho fatto vedere molti anni addietro nella mia Dissertazione *de natura, & usu infinitorum, & infinite parvorum*. Idee incerte pure, e confuse, credo, che si abbiano della natura delle quantità negative, sulla quale ancora si litiga, e molto più della idea di multiplicazione, e divisione fatta per una quantità negativa, e dell' idea di rapporto, o proporzione geometrica, ove questa parola si applichi alle quantità negative, e positive mescolate insieme: o così pure non è netta l'idea delle potenze delle quantità negative, che ne dipende, e nelle quali nascono de' grandi imbarazzi, massime ove l'esponente sia indefinito.

40. Sopra ogni altra cosa la lite della parte geometrica, credo, che nasca dall' essere affatto vaga, e indeterminata l'idea della continuità geometrica presa in generale. Per le curve algebraiche vi è almeno un criterio di tale continuità nella semplicità della equazione della curva, irresolubile in due, dalla multiplicazione delle quali ella nasca, donde se ne potrebbe cavare

vare

vare una precisa deffinizione di nome, pigliandola nel senso, in cui si adopra da' Geometri in questi casi.

41. Converrà però badar bene di non mescolarvi dopo delle idee attaccate dalla lingua comune alla parola continuità; mentre così si troveranno appartenenti ad una stessa curva continua più rami anche finiti, e separati l'uno dall' altro in modo, che mai non si incontrino, come ve ne sono due nella concoide di base circolare, ove il polo sia preso dovunque tra il centro, e la circonferenza, esprimendosi la natura di amendue questi rami da un' unica equazione indivisibile di sesto grado. Allora non sarà il perimetro intero unito con una sola linea non interrotta in modo, che da un suo punto a qualunque altro si possa giugnere con un cammino continuato nel senso della lingua non geometrica, ma comune.

42. Ma per le curve trascendenti non vi è nè deffinizione netta, nè criterio universalmente accettato, e tale, che applicato alle curve in generale non faccia in qualche caso a calci coll' altro delle curve algebraiche, onde se ne deduca insieme l'esservi, e il non esservi continuità.

43. Io svolgo a pieno tutto questo nella Memoria suddetta, e mostro, che parlando condizionatamente, si può sostenere quello, che uno vuole. Finisco per altro con un' avvertenza essenzialissima, ed è, che tutta questa lite non interessa punto l'uso comune de' logaritmi in Trigonometría, ed Astronomía, pel quale sono stati istruiti, cioè di facilitare con sicurezza il calcolo numerico col sostituire le somme, e sottrazioni alle multiplicazioni, e divisioni con quello, che ne dipende per le potenze. Se si trova è la formola $\frac{abc}{mn} - \frac{d^2 e^3}{f^4 g}$, si faccia $\frac{abc}{mn} = r$, $\frac{d^2 e^3}{f^4 g} = t$. Indi si trovi tanto l'$r$, quanto il t numeri positivi coll' ajuto de' logaritmi, pigliando $lr = la + lb + lc - lm - ln$, e $lt = 2ld + 3le - 4lf - lg$, e poi si piglj $r - t$, che si avrà l'intento senza alcun pericolo di errore, e senza che vi abbiano menoma difficoltà i difensori di amendue le sentenze, la lite de' quali risguarda principalissimamente de' punti puramente specolativi.

ME-

Metodo di alzare un' infinitinomio a qualunque potenza indefinita.

1. SIa l'infinitinomio $a + bx + cx^2 + dx^3$ ec. da alzarsi alla potenza m. Essa potenza avrà infiniti membri, il primo de' quali sarà a^m, e i seguenti avranno le potenze x, x^2, x^3 ec. con de' coefficienti numerici, e letterali. Tutti i termini di qualunque membro corrispondenti a qualunque potenza x^n si troveranno facilmente coll' ajuto di una preparazione generale per tutti.

2. Si scriva in una riga la serie naturale de' numeri, e sotto di essi in un' altra si mettano le lettere b, c, d ec., che nel dato infinitinomio sono loro compagne nelle potenze di x espresse da essi numeri.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & . & 2 & . & 3 & . & 4 & . & 5 & . & 6 & . & 7 & . & 8 & . & 9 & . & 10 & \text{ec.} \\ b & . & c & . & d & . & e & . & f & . & g & . & h & . & i & . & k & . & l & \text{ec.} \end{array}$$

3. Tutta questa preparazione generale, se ne faccia una particolare per i termini corrispondenti alla potenza x^n, scrivendo in tante righe tutti i modi, ne' quali il numero n può essere composto di numeri interi, ove si comprendono anche le semplici unità, e lo stesso n parte totale di se medesimo. Ciò si farà facilmente scrivendo nella prima riga tante unità, nella seconda un binario colle unità residue, indi due binarj, e così in poi: esauriti i binarj si metta un ternario colle unità, indi co' binarj, e unità, e poi si passi a più ternarj, indi al quaternario, e a più quaternarj colle combinazioni precedenti del residuo, e al modo istesso si vada innanzi alle parti maggiori. Lo esempio, che si ha qui sotto, farà schiarire il metodo.

4. Ora il membro cercato avrà tanti termini, quanti saranno i modi suddetti di comporre il numero n, determinando ciascuno di essi modi il suo termine, che nell' esempio medesimo gli

vare una precisa deffinizione di nome, pigliandola nel senso, in cui si adopra da' Geometri in questi casi.

41. Converrà però badar bene di non mescolarvi dopo delle idee attaccate dalla lingua comune alla parola continuità; mentre così si troveranno appartenenti ad una stessa curva continua più rami anche finiti, e separati l'uno dall'altro in modo, che mai non si incontrino, come ve ne sono due nella concoide di base circolare, ove il polo sia preso dovunque tra il centro, e la circonferenza, esprimendosi la natura di amendue questi rami da un'unica equazione indivisibile di sesto grado. Allora non sarà il perimetro intero unito con una sola linea non interrotta in modo, che da un suo punto a qualunque altro si possa giugnere con un cammino continuato nel senso della lingua non geometrica, ma comune.

42. Ma per le curve transcendenti non vi è nè deffinizione netta, nè criterio universalmente accettato, e tale, che applicato alle curve in generale non faccia in qualche caso a calci coll'altro delle curve algebraiche, onde se ne deduca insieme l'esservi, e il non esservi continuità.

43. Io svolgo a pieno tutto questo nella Memoria suddetta, e mostro, che parlando condizionatamente, si può sostenere quello, che uno vuole. Ma in modo particolare fo vedere, in che cosa consista il nodo principale, e l'origine di tutte le contraddizioni, nelle quali si urta, nella parte analitica. Esso nodo consiste nella combinazione delle seguenti due regole comuni.

I. *I segni conformi nella multiplicazione rendono il* $+$, *i difformi il* $-$.

II. *Quando una quantità si concepisca indeterminatamente in modo, che si accosti ad un'altra oltre ogni limite, si attribuisce a questa quel valore, a cui oltre ogni limite si è accostato il valore trovato per quella.*

44. La prima di queste regole determinando i valori di $x = a^r$ nelle diverse supposizioni di r, forma il nodo in vigore del seguente teorema, che si concepisce facilmente, ma che io rigorosamente dimostro.

 Dato

Dato un qualunque valore r, si può trovare una frazione, che ne sia o maggiore, o minore, come uno vuole, che ne differisca di una quantità minore di qualunque dato b comunque piccola, e che abbia il suo numeratore, e denominatore, come uno vuole, o amendue spari, o amendue anche imparimente pari, o spari quel de' due, che si vuole, e l'altro pari.

45. Finisco la mia ricerca con un' avvertenza essenziale, ed è, che tutta questa lite non interessa punto l'uso comune de' logaritmi in Trigonometría, ed Astronomía, pel quale sono stati istituiti, cioè di facilitare con sicurezza il calcolo numerico col sostituire le somme, e sottrazioni alle multiplicazioni, e divisioni con quello, che ne dipende per le potenze. Se si trova la formola $\frac{abc}{mn}-\frac{d^2e^3}{f^4g}$, si faccia $\frac{abc}{mn}=r$, $\frac{d^2e^3}{f^4g}=t$. Indi si trovi tanto l'r, quanto il t numeri positivi coll' ajuto de' logaritmi, pigliando $lr=la+lb+lc-lm-ln$, e $lt=2ld+3le-4lf-lg$, e poi si piglj $r-t$, che si avrà l'intento senza alcun pericolo di errore, e senza che vi abbiano menoma difficoltà i difensori di amendue le sentenze, la lite de' quali risguarda principalissimamente de' punti puramente specolativi.

46. Non per questo stimo, come pensano alcuni, inutile il trattare di una tale questione, perchè serve per acquistare per istrada una quantità di notizie interessanti, e schiarire un gran numero di idee.

ME-

MEMORIA SECONDA.

Metodo di alzare un infinitinomio a qualunque potenza indefinita.

1. Sia l'infinitinomio $a + bx + cx^2 + dx^3$ ec. da alzarſi alla potenza m. Eſſa potenza avrà infiniti membri, il primo de' quali ſarà a^m, e i ſeguenti avranno le potenze x, x^2, x^3 ec. con de' coefficienti numerici, e letterali. Tutti i termini di qualunque membro corriſpondenti a qualunque potenza x^n ſi troveranno facilmente coll' ajuto di una preparazione generale per tutti.

2. Si ſcriva in una riga la ſerie naturale de' numeri, e ſotto di eſſi in un' altra ſi mettano le lettere b, c, d ec., che nel dato infinitinomio ſono loro compagne nelle potenze di x eſpreſſe da eſſi numeri.

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 ec.
b . *c* . *d* . *e* . *f* . *g* . *h* . *i* . *k* . *l* ec.

3. Fatta queſta preparazione generale, ſe ne faccia una particolare per i termini corriſpondenti alla potenza x^n, ſcrivendo in tante righe tutti i modi, ne' quali il numero n può eſſere compoſto di numeri interi, ove ſi comprendono anche le ſemplici unità, e lo ſteſſo n parte totale di ſe medeſimo. Ciò ſi farà facilmente ſcrivendo nella prima riga tante unità, nella ſeconda un binario colle unità reſidue, indi due binarj, e così in poi: eſauriti i binarj ſi metta un ternario colle unità, indi co' binarj, e unità, e poi ſi paſſi a più ternarj, indi al quaternario, e a più quaternarj colle combinazioni precedenti del reſiduo, e al modo iſteſſo ſi vada innanzi alle parti maggiori. L'eſempio, che ſi ha qui ſotto, farà ſchiarire il metodo.

4. Ora il membro cercato avrà tanti termini, quanti ſaranno i modi ſuddetti di comporre il numero n, determinando ciaſcuno di eſſi modi il ſuo termine, che nell' eſempio medeſimo

 gli

gli ſtarà accanto di fianco. Baſterà oſſervare le regole ſeguenti:
I. Per numeratore del coefficiente numerico ſi piglino tanti termini della progreſſione $m \cdot m-1 \cdot m-2$ ec., quante ſono le parti componenti.
II. Per denominatore ſi piglino altrettanti termini della ſerie naturale $1 \cdot 2 \cdot 3$ ec., la quale però ſi ricominci ſempre da capo dall' 1, ovunque ſi muta la groſſezza della parte.
III. Per coefficiente letterale ſi metta prima a alzato alla potenza m meno il numero delle parti, indi le lettere b, c, d ec. compagne di eſſe parti nella preparazione generale; onde ſe una parte ſarà ripetuta più volte, ſi metterà la lettera compagna coll' eſponente, che eſprima il numero di quelle parti uguali.

Eſempio $n=6$

1.1.1.1.1.1	$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \cdot m-5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^{m-5} b^6$
2.1.1.1.1	$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{m-5} b^4 c$
2.2.1.1	$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} a^{m-4} b^2 c^2$
2.2.2	$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} c^3$
3.1.1.1	$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-4} b^3 d$
3.2.1	$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 1 \cdot 1} a^{m-3} bcd$
3.3	$\frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} a^{m-2} d^2$
4.1.1	$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 1 \cdot 2} a^{m-3} b^2 e$

4.2 $\qquad \frac{m.m-1}{1.1} a^{m-2} ce$

5.1 $\qquad \frac{m.m-1}{1.1} a^{m-2} bf$

6. $\qquad \frac{m}{1} a^{m-1} g$

5. Il primo termine ha nel numeratore 6. termini della progreſſione $m.m-1$ ec., perchè 6. ſono le parti 1.1. ec., le quali eſſendo tutte uguali, il denominatore ha 6. termini della ſerie 1.2.3. ec. continuata. Le 6. parti danno anche a^{m-6}, le quali tutte corriſpondendo al b, ſi ha b^6.

6. Nel terzo termine ſi ânno nel numeratore 4. termini coll' a^{m-4}, per eſſer 4. le parti, e come eſſe dopo la ſeconda paſſano da 2 all' 1, ſi ha nel denominatore 1.2.1.2, ripigliando da capo la ſerie: b^2 c^2 ſono compagne delle parti 1.1.2.2.

7. Nel ſeſto termine le tre parti 3.2.1 ſono tutte diverſe, e però il denominatore torna ſempre da capo coll' 1.1.1.

8. La dimoſtrazione di queſto metodo dipende dalle leggi delle combinazioni. Per alzare l'infinitinomio dato alle potenze ſuperiori, conviene andarlo multiplicando per ſe medeſimo. Come le lettere a, b, c ec. ſi trovano tutte di una ſola dimenſione in eſſo, è coſa manifeſta, che nel quadrato ſaranno tutte combinate a binarj, nella terza potenza a ternarj, e così in poi; onde il coefficiente letterale dovrà in ogni termine avere dimenſioni m, ed è coſa chiara, che il primo termine ſempre conterrà il ſolo valore a, onde ſarà a^m.

9. Negli altri colle lettere b, c, d ec. vi verrà x alzato alle potenze loro compagne; onde in ogni termine la potenza x ſarà la ſomma di tutti i numeri compagni di dette lettere. Quindi dovendovi eſſere tutte le loro poſſibili combinazioni,

 giac-

giacchè tutte si moltiplicano per tutte ; la potenza n qualunque dovrà avere i termini corrispondenti a tutti i modi, ne' quali il numero n può essere formato da' numeri 1.2.3 ec., e in essi le lettere compagne delle parti componenti, le quali coll' a dovendo empire le dimensioni m, dovrà l' a per esponente avere m meno il numero di dette parti.

10. Così rimane dimostrata la 3. regola : le prime due si dimostrano in quest' altro modo. Il coefficiente numerico deve esprimere il uumero di tutte le combinazioni possibili dello stesso numero m di lettere a, b, c, d ec. ripetute, quanto porta l'esponente di ciascuna. Quindi per trovare il coefficiente numerico, basterà il trovare un tale numero di combinazioni. Ciò si farà nel seguente lemma, e suoi corollarj.

11. Lemma. Se debba collocarsi un numero m di termini a, b, c ec. mutati i loro siti comunque, e si cerchi il numero di tutte le combinazioni possibili; si consideri, che posto il primo comunque, si potrà mettere il secondo in due siti, cioè innanzi, o dopo : il terzo in 3, cioè innanzi al primo, dopo di esso, e dopo il secondo; e così sempre in poi ogni termine nuovo in un sito di più, cioè innanzi al primo de' già collocati, o dopo di esso, e dopo qualunque de' seguenti. Quindi il numero di tutte le combinazioni sarà il prodotto della serie $1.2.3....m$.

12. Corol. 1. Se vi sia fra essi termini un numero r di termini, che non debbano mutarsi fra loro, ma tenendo essi lo stesso ordine scambievole, debbano solamente mutarsi gli altri tutti tanto rispetto a se stessi, quanto interponendosi comunque fra quelli; il numero delle combinazioni si avrà dividendo la serie $1.2.3....m$ per la serie $1.2.3....r$.

13. Imperocchè per avere l'intero numero delle combinazioni, per ogni combinazione degli altri termini, converrebbe inoltre, tenuti essi immobili a' loro posti, mutare fra loro in

tutte

tutte le maniere possibili que' termini, che non si mutavano, le quali maniere pel lemma sono $1 . 2 . 3 \ldots . n$, e il numero di quelle multiplicato pel numero di queste darebbe il numero intero $1 . 2 . 3 \ldots . m$. Quindi questo diviso per $1 . 2 . 3 \ldots . n$ darà il numero cercato.

14. Corol. 2. Se il numero di tutti i termini sia m, e il numero di quelli, che mantengono il suo ordine scambievole senza mutarsi sia $n = m - r$, il numero di tutte le altre combinazioni sarà il prodotto del numero r di termini della serie $m . m - 1 . m - 2$ ec.

15. Imperocchè $\frac{1 . 2 . 3 \ldots m - r . m - (r - 1) \ldots m - 2 . m - 1 . m}{1 . 2 . 3 \ldots m - r}$ $= m . m - 1 . m - 2 \ldots m - (r - 1)$, dove vi è, dopo il primo termine un numero di termini $r - 1$, e però includendo lo stesso primo, se ne ha il numero r.

16. Corol. 3. Se vi saranno inoltre altre somme di termini, che non si debbano mutar fra loro, e in una il loro numero sia t, in un' altra u ec.; il numero delle combinazioni si dovrà per la stessa ragione scemare ancora, dividendolo pel prodotto de' termini $1 . 2 . 3 \ldots t . 1 . 2 . 3 \ldots u$ ec.

17. Quindi in quel caso il numero delle combinazioni sarà $\frac{m . m - 1 . m - 2 \ldots . m - (r - 1)}{1 . 2 . 3 \ldots t . 1 . 2 . 3 \ldots u \text{ ec.}}$

18. Poste queste regole delle combinazioni, si vedrà subito la dimostrazione della prima, e seconda regola proposta pel coefficiente numerico.

19. Se nel fare la multiplicazione successiva, richiesta per l'elevazione del dato infinitinomio, si mette sempre la nuova lettera multiplicante avanti a tutte quelle, che già si trovano ne' termini della potenza precedente, i quali devono multiplicarsi; è cosa manifesta, che tutti i valori dissimili verranno mescolati fra loro in tutte le maniere possibili, e combinati comun-

munque colli simili ; ma li simili saranno aggiunti a se stessi, e a quelli in tal maniera , che non abbiano fra loro , se non un ordine unico. Verrà tanto il bc, quando il c si multiplica per b, quanto il cb, quando il b si multiplica per c; così pure verranno tutti i terni bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb, quando per qualunque delle 3. lettere si multiplica l'uno, e l'altro de' seguenti due ambi delle altre due. Ma il b^3 verrà solo una volta, quando il b si multiplica per b, e il b^3, quando per b si multiplica il b^2.

20. Quindi se sia r il numero delle parti uguali , che devono dare il termine, onde vi debba essere a^{m-r}, cioè un numero $m-r$ di termini simili a, e tutti gli altri sieno dissimili; sarà pel Corol. 2. il numero di combinazioni uguale al prodotto di un numero r di termini della progressione m . $m-1$. $m-2$ ec., conforme alla prima regola , che dà il numeratore del coefficiente numerico. Ma se vi saranno inoltre altri termini b, c, d ec. simili corrispondenti a delle parti uguali componenti il numero n, converrà inoltre dare per divisore numerico altrettante serie 1 . 2 . 3 ec., quante sono le specie di esse parti uguali , continuando ciascuna serie per tanti termini , quante sono esse in ogni specie. Queste serie coll'unità messa per l'analogía in luogo di ogni parte solitaria, danno appunto il denominatore prescritto nella regola seconda.

21. Corol. 1. E' cosa facile a vedere, che ove la potenza m sia un numero determinato positivo intero, si scemerà la fatica di molto; giacchè dovranno rigettarsi tutti i modi di comporre il numero n, che abbiano numero di parti maggior di m; mentre in essi modi si avrebbe nel numeratore $m-m=0$: posto poi negli altri per m il suo numero, si eliderebbero varj numeratori da' denominatori, e il calcolo diverrebbe assai più semplice.

22. Se nell' esempio proposto si cercasse la potenza terza; fatto

fatto $m=3$, e rigettati tutti i modi, che ânno più di 3. parti, si rigetterebbero i modi 1, 2, 3, 5, e gli altri darebbero $\frac{3.2.1}{1.2.3}=1$, $\frac{3.2.1}{1.1.1}=6$, $\frac{3.2}{1.2}=3$, $\frac{3.2.1}{1.1.2}=3$, $\frac{3.2}{1.1}=6$, $\frac{3.2}{1.1}=6$, $\frac{3}{1}=3$. Quindi il membro settimo della terza potenza, ommesso anche l'a, ove sono 3 le parti per l'$a^{3-3}=a^0=1$, sarebbe $(c^3+6bcd+3ad^2+3b^2e+6aee+6abf+3a^2g)x^6$.

23. Corol. 2. Se l'infinitinomio non ha il primo termine mancante di x, il valore a sarà $=0$. Quindi saranno $=0$ tutti i termini, ne' quali esso vi entra, cioè tutti i termini, che ânno numero di parti corrispondenti minor di r: onde mancheranno tutti i membri appartenenti alle potenze di x minori di m. Sarà meglio in questo caso considerare l'infinitinomio ridotto a questa forma $ax+bx^2+cx^3$ ec. $=x(a+bx+cx^2$ ec.); onde elevato $a+bx+cx^2$ ec., e moltiplicato ogni termine per x^m, si avrà l'intento.

24. Corol. 3. Se nell'infinitinomio manca qualche potenza di x, nella formola generale $a+bx+cx^2$ ec. sarà $=0$ la lettera, che corrisponde a quella potenza: e però anderanno rigettati tutti que' modi di comporre il numero n, che avranno qualche parte esprimente quella potenza.

25. Corol. 4. Quindi se in cambio dell'infinitinomio si avrà un polinomio; basterà ritenere que' modi soli, ne' quali non vi è parte alcuna, che non corrisponda a qualche esponente di que' del polinomio medesimo.

26. Corol. 5. Se un polinomio finito si dovrà elevare a una potenza espressa da un numero intero positivo; la formola darà un numero finito di termini; e se la potenza la più alta di x sarà r; il membro ultimo avrà x^{mr} divenendo $=0$ qualunque mem-

membro posteriore. Imperocchè in esso dovrebbe essere $n > mr$; onde se n si divida anche in parti uguali m; ogni parte sarà $\frac{n}{m} > r$: e però molto più, se si divida in un numero minore di parti o uguali, o disuguali, qualche parte sarà maggiore di r: quindi essa non si troverà tra gli esponenti del dato polinomio; onde quel modo di comporre il numero n dovrà rigettarsi pel Corol. 4.

27. Scolio. Converrebbe ora determinare il numero de' diversi modi, ne' quali si può comporre un dato numero da' numeri interi. Questo argomento lo tratta a lungo l'Eulero nella Introduzione *in Analysim Infinitorum* al tomo 1. capo 16., ove riduce il problema alla evoluzione della frazione $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\text{ ec.}}$ in una serie ricorrente della forma $1 + Ax + Bx^2 \ldots + Px^n$. Fa vedere, che ogni coefficiente P mostra in quanti modi il suo compagno n possa formarsi colla addizione de' numeri interi, e ne forma la seguente tavola

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
176	231	297	385	490	627	792	1002	1250	1570

28. Ogni numero, che sta sotto, mostra in quanti modi si possa comporre il numero, che sta sopra. Vi si vede, che pel num. 6. vi sono modi 11., quanti appunto se ne sono trovati nell' esempio proposto. Vi si scorge poi facilmente, quanto vada innanzi questo numero ne' numeri maggiori, e però quanto orribile sia la farragine de' termini, che devono nascere ne' membri un poco avvanzati. Il membro ventesimo quinto, che cor-

rif-

risponde all' x^{24} ha già più di un migliaro, e mezzo di termini. Almeno col metodo qui proposto questi, ancora si troverebbero da se senza la tanto più immensa farragine della somma di tutt i precedenti, e ciascuno di essi si avrebbe con un metodo tanto semplice, e generale.

29. Scolio 2. Questo metodo io l'ho già pubblicato nel giornale de' Letterati di Roma fino dall' anno 1747., ove in una di due susseguenti Memorie delle Riflessioni, che vi ho aggiunte, ne ho anche fatto il confronto con quello del Moivre. Ma qui l'ho dimostrato con metodo assai più semplice, e diretto, che ho ricavato dalla natura stessa dell' oggetto, prendendolo dalle formole delle combinazioni, che vi devono entrare. Succede quasi sempre anche in Geometría, e nel calcolo, che le vie più diritte, e più semplici per arrivare ad un termine nascosto sono le ultime a discuoprirsi.

IL FINE.

		ERRORI	CORREZIONI
pag. 3.	lin. 3.	le quantità	quantità
	22	a 1 abx	a 1 abx
	26. 27.	dalle dimenfioni	delle dimenfioni
6.	10.	per l'apporfi	per l'opporfi
15.	ult.	o che	
21.	12.	$a \quad c$ $b \quad d$	$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d}$
66.	ult.	problema	problema
72.	26.	10.°	8.°
103.	4.	c	

Si incontrerà di tanto in tanto qualch'altro errore fimile a quefti, ma perciò affai facile ad avvertirfi dal lettore. Dopo le prime pagine, la revifione è ftata ben follecita, ed efatta; certi errori però, che dipendono dalla più forte, o più debole preffione del torchio, fono ftati inevitabili, ma non già fparfi in tutte le copie. A cagione d'efempio in varie copie fi vedrà alla pag. 21. fegnata leggermente la lineetta, che fepara l'a dal b, in altre fi troverà chiaramente impreffa, ed in altre farà affatto fvanita.

Nell' Aggiunta			
pag. 244.	lin. 22.	00153	0, 0153
	24.	— 10	— 8
	25.	r' — 8	r' — 9
247.	4.	linea	virgola
252.	12.	all'	coll'
254.	23.	o cosi	così